SAYISAL YÖNTEMLER

DERS NOTLARI

Yrd. Doç. Dr. Hüseyin Bayıroğlu

İSTANBUL 2006

İÇİNDEKİLER

SAYFA

1-GİRİŞ

Mühendislikte doğadaki olayların ve oluşumların bilimsel yöntemlerle anlaşılan işleyiş kuralları çok önemlidir. Bu kurallar insanlığın kullanımına sunulacak alet, cihaz, makine, yapı ve sistemlerinin oluşturulmasında, işletilmesinde ve geliştirilmesinde kullanılmaktadır.

Doğadaki olaylar ve oluşumlar bilimsel yöntemlerle incelenirken değeri değiştikçe olayların seyrini veya oluşumların sonucunu etkileyen büyüklüklere değişkenler denir. İnceleme sonucunda değişkenler arasındaki ilişkilerden tablo değerleri çeşitli grafikler veya cebirsel, diferansiyel ve integral denklemler veya sistemleri elde edilir.

İkinci dereceden cebirsel denklemler sayısı fazla olmayan cebirsel denklem sistemleri lineer diferansiyel denklemler ve sistemleri , düzgün geometriye sahip kısmi türevli lineer diferansiyel denklemler ve sistemlerinin analitik yöntemlerle çözüme gidilmesine karşılık diğer durumlarda pek kolay olmamaktadır. Hatta çoğu kere bu imkansızdır. Bundan dolayı büyük denklem sistemleri, lineer olmama durumu ve karmaşık geometri durumlarında sayısal yöntemler veya deneysel yöntemler uygulanmaktadır. Son yıllarda bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler sayısal yöntemlerin yoğunluğunu ve etkinliğini artırmıştır.

1.1 SAYISAL HESAPLAMALARDA HATA ANALİZİ

Sayısal yöntemlerde oluşabilecek hataları kesme , yuvarlatma hatası ve seçilen matematik modelden kaynaklanan hatalar olarak sayabiliriz.

Kesme hatası, yüksek matematik fonksiyonları hesaplanırken kullanılan serilerde alınan terim sayısına bağlıdır.

Yuvarlatma hatası, yapılan işlemlerde ger çel sayılarda virgülden sonra alınan rakam sayısına bağlıdı.

Matematik modelden kaynaklanan hata Gerçek durum ile matematik model arasındaki farka bağlıdır.

1.2 HATA TANIMI

Doğru değer = yaklaşık değer + Hata

Hata = Doğru değer - yaklaşık değer

E_t = Doğru değer - yaklaşık değer

Bağıl hata = hata / doğru değer

Bağıl gerçek yüzde hata ε_t = (gerçek hata / doğru değer) 100 %

Bağıl yaklaşık yüzde hata ε_a = (yaklaşık hata / yaklaşık değer) 100 %

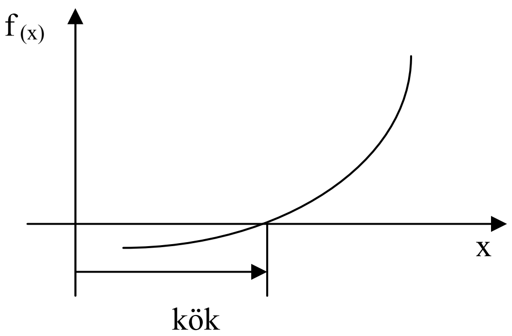
Ardışık metotlarda uygulanışı

ε_a = ((şimdiki yaklaşık değer – bir önceki yaklaşık değer)/ (şimdiki yaklaşık değer)) 100 %

2 SAYISAL YÖNTEMLERİN SINIFLANDIRIMASI

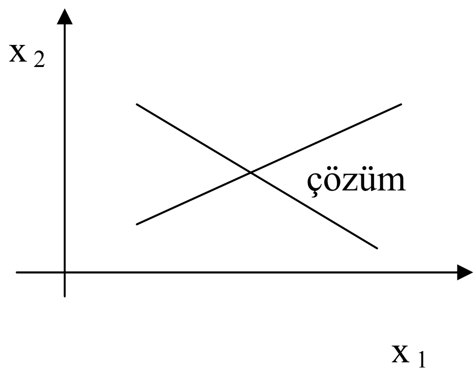
2.1 Denklemlerin kökleri

$f_{(x)} = 0$ denklemini sağlayan x değerlerinin hesabı

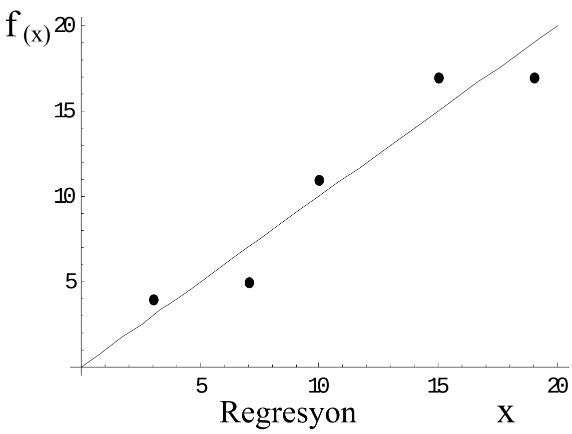


2.2 Lineer denklem sistemlerinin çözümü

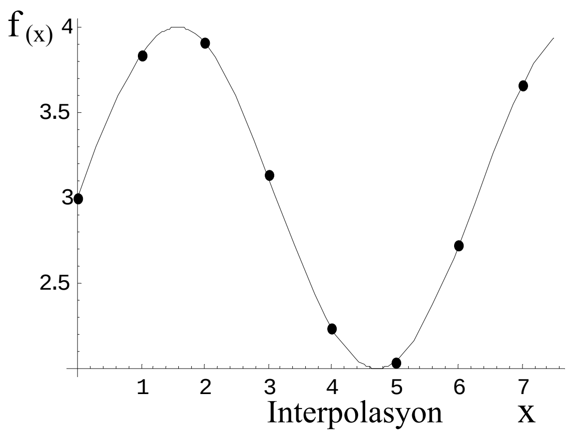
$$A_{11}\, x_1 + A_{12}\, x_2 = C_1$$
$$A_{21}\, x_1 + A_{22}\, x_2 = C_2$$



2.3 Eğri uydurulması



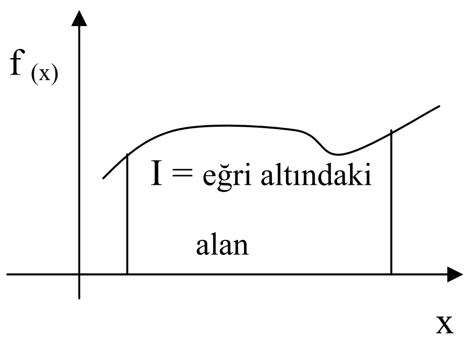
Regresyon
(yaklaştırma)



Interpolasyon
(ara değeri bulma)

2.4 Nümerik integral

$$\mathbf{I = \int_a^b f_{(x)} dx}$$



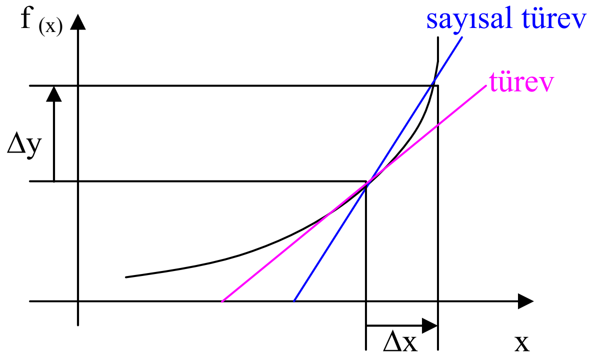
2.5 Nümerik türev

Türev:

$$\frac{df_{(x)}}{dx} = \mathrm{Lim}_{\Delta x \to 0} \frac{f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}}{\Delta x}$$

Nümerik türev :

$$\frac{df_{(x)}}{dx} \cong \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_{(x+\Delta x)} - f_{(x)}}{\Delta x}$$

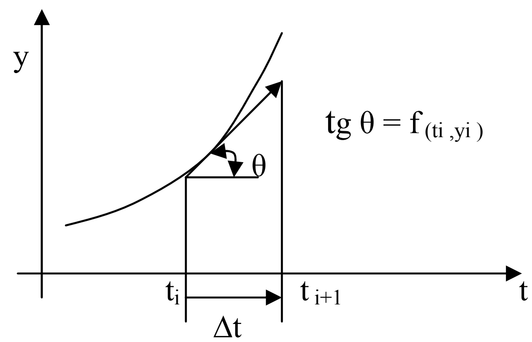


2.6 Adi diferansiyel denklemler

$$\frac{dy}{dt} \cong \frac{\Delta y}{\Delta t} = f_{(t,y)}$$

y nin t ye bağlı çözümü:

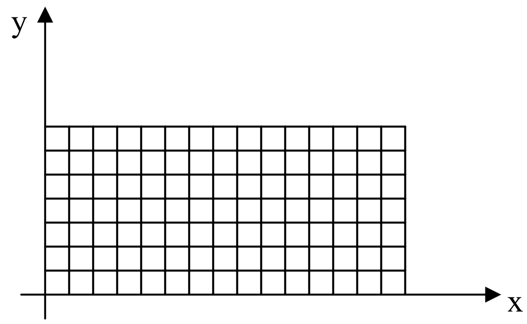
$$y_{i+1} = y_i + f_{(t,y)}\,\Delta t$$



2.7 Kısmi türevli diferansiyel denklemler

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_{(x,y)}$$

x ve y ye bağlı olarak u hesaplanır.



3 DENKLEMLERİN KÖKLERİNİN BULUNMASI

$f(x) = 0$ denklemini sağlayan x değerlerine bu denklemin kökleri denir.
Örnek olarak 2. dereceden

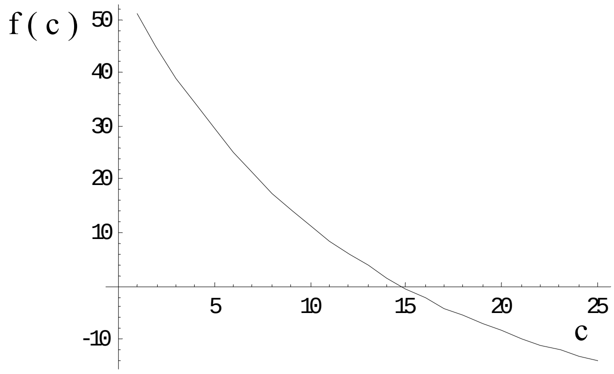
$$f(x) = a x^2 + b x + c$$

denkleminin kökleri $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ eşitliği ile kolaylıkla bulunur.

Herhangi bir $f(x) = 0$ denkleminin kökleri her zaman bu kadar kolay hesaplanamaz. Bunun için sayısal yöntemler geliştirilmiştir.

3.1 GRAFİK METODU

Bu yöntemde f(x) denklemi ölçekli bir Şekilde çizilir. Eğrinin x eksenini kestiği noktalar okunmaya çalışılır.



Örnek olarak paraşütün inişini karakterize eden denklemi ele alalım.

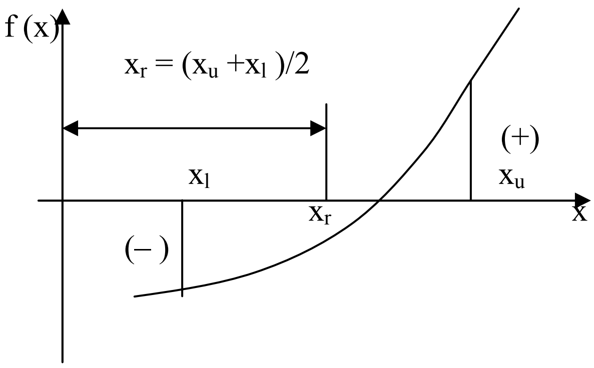
$$\mathbf{v = \frac{g\,m}{c}\left[1 - e^{-(c/m)t}\right]}$$

Burada v hızı, g yerçekimi ivmesini , m Kütleyi ve c de havanın direncini gösteriyor.

Verilen v = 40 m/s , m=68,1 kg , g=9.8 m/s^2 , t =10 s değerleri ile c hava direncini hesaplamak için

$\mathbf{f(c) = \frac{g\,m}{c}\left[1 - e^{-(c/m)t}\right] - v}$ şeklinde yukarıdaki denklemi düzenleyip bunu sıfır yapan c değerini yukarıdaki grafikten c = 14,7 değerini okuyabiliriz.

3.2 ORTA NOKTA METODU



$f(x_l) * f(x_u) < 0$ ise $f(x)$ denkleminin $(x_l\ ,\ x_u)$ aralığında en az bir kökü vardır.

$x_r = (x_l + x_u)/2$

$f(x_l) * f(x_r) < 0$ ise $x_u = x_r$
$f(x_l) * f(x_r) > 0$ ise $x_l = x_r$
$f(x_l) * f(x_r) = 0$ ise x_r köktür.

Örnek 3.2.1

$f(x) = x^2 - 2x - 3$ "çözüm $x_1 = -1$ $x_2 = 3$ "

($x_l = 2$ $x_u = 5$) $f(2) = -3$ $f(5) = 12$ $f(2) * f(5) = -36 < 0$

$x_r = (2+5)/2$ $x_r = 3,5$ $f(3,5) = 2,25$ $f(2) * f(3,5) < 0$ $x_u = 3,5$

($x_l = 2$ $x_u = 3,5$) $x_r = (2+3,5)/2$ $x_r = 2,75$ $f(2,75) = -0.93$

$f(2) * f(2,75) > 0$ $x_l = 2,75$

($x_l = 2,75$, $x_u = 3,5$) $x_r = 3,125$ $f(3,125) = 0.516$ $f(2,75) * f(3,125) < 0$ $x_u = 3,125$

$|\varepsilon_a| = |(3,125-2,75)/3,125|\ 100\ \%$ $|\varepsilon_a| = 12\ \%$

($x_l = 2,75$, $x_u = 3,125$) $x_r = 2,94$ $f(2,94) = -0,24$ $f(2,75) * f(2,94) > 0$ $x_l = 2,94$
$|\varepsilon_a| = 6,3\ \%$

($x_l = 2,94$, $x_u = 3,125$) $x_r = 3,03$ $f(x_r) = 0.12$ $f(x_l).f(x_r) < 0$ $x_u = 3,03$ $|\varepsilon_a| = 2,97\ \%$

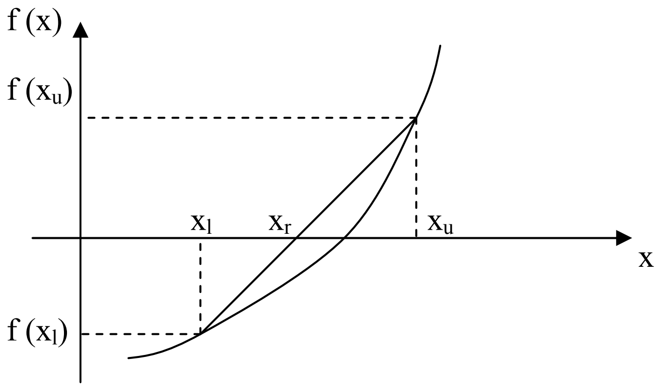
($x_l = 2,94$, $x_u = 3,03$) $x_r = 2,985$ $f(x_r) = -0.06$ $f(x_l).f(x_r) > 0$ $x_l = 2,985$ $|\varepsilon_a| = 1,5\ \%$

($x_l = 2,985$, $x_u = 3,03$) $x_r = 3,0075$ $f(x_r) = -0.03$ $f(x_l).f(x_r) < 0$ $x_u = 3,0075$ $|\varepsilon_a| = 0,75\ \%$

($x_l = 2,985$, $x_u = 3,0075$) $x_r = 2,99$ $f(x_r) = -0.0399$ $f(x_l).f(x_r) > 0$ $x_l = 2,99$ $|\varepsilon_a| = 0,59\ \%$

($x_l = 2,99$, $x_u = 3,0075$) $x_r = 2,999$ $|\varepsilon_a| = 0,3\ \%$

3.3 HATALI KONUM METODU (Lineer interpolasyon yöntemi)



$$\frac{f(x_\ell)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u}$$

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)\left(x_l - x_u\right)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

Örnek 3.3.1

$f(x) = x^2 - 2x - 3$ “ (çözüm $x_1 = -1$, $x_2 = 3$)

$x_l = 2$ $x_u = 5$ için $f(x_l) = -3$ $f(x_u) = 12$ $f(x_l)\, f(x_u) < 0$ olduğundan f(x) denkleminin (x_l , x_u) aralığında en az bir kökü vardır.

$x_r = 5 - 12\,(2-5)/(-3-12)$ $x_r = 2{,}6$ $|\varepsilon_a| = |(2{,}6 - 2)/2{,}6|\,100\,\% = 23\,\%$

$x_l = 2{,}6$ $f(x_l) = -1{,}44$ $x_r = 5 - 12\,(2{,}6 - 5)/(-1{,}44-12)$ $x_r = 2{,}86$ $|\varepsilon_a| = 9{,}1\,\%$

$x_l = 2{,}86$ $f(x_l) = -0{,}54$ $x_r = 5 - 12\,(2{,}86 - 5)/(-0{,}54-12)$ $x_r = 2{,}95$ $|\varepsilon_a| = 3{,}05\,\%$

$x_l = 2{,}95$ $f(x_l) = -0{,}1975$ $x_r = 5 - 12\,(2{,}95 - 5)/(-0{,}1975-12)$ $x_r = 2{,}983$ $|\varepsilon_a| = 1{,}1\,\%$

$x_l = 2{,}983$ $f(x_l) = -0{,}068$ $x_r = 5 - 12\,(2{,}983 - 5)/(-0{,}068-12)$ $x_r = 2{,}994$ $|\varepsilon_a| = 0{,}37\,\%$

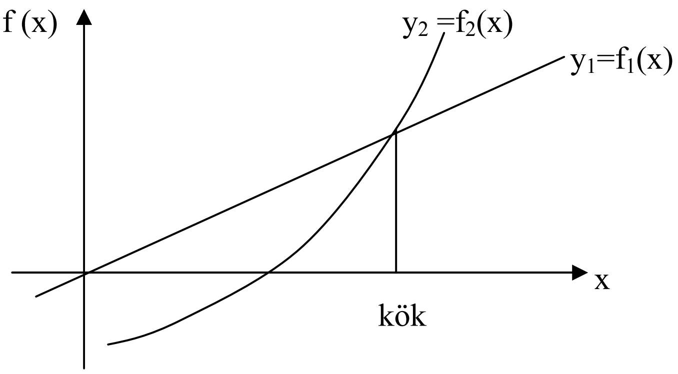
$x_l = 2{,}994$ $f(x_l) = -0{,}024$ $x_r = 5 - 12\,(2{,}994 - 5)/(-0{,}024-12)$ $x_r = 2{,}983$ $|\varepsilon_a| = 0{,}13\,\%$

$|\varepsilon_a| = |(2{,}998 - 2{,}994)/2{,}998|\,100\,\% = 0{,}13\,\%$

3.4 BASİT TEK NOKTALI ARDIŞIK METOD

Bu yöntemde $f(x)$ fonksiyonu $f_1(x) = f_2(x)$ olacak şekilde iki parçaya ayrılır.

Bu ayırım $x_{i+1} = g(x_i)$ şeklinde olabilir.



$x_{i+1} = g(x_i)$

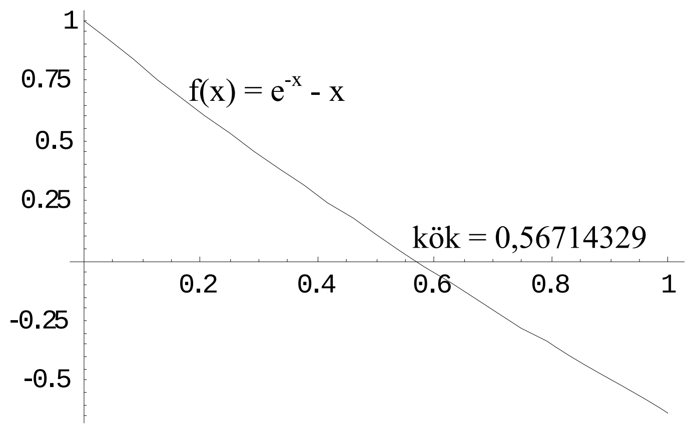
$|\varepsilon_a| = |(x_{i+1} - x_i) / x_{i+1}|\ 100\ \%$

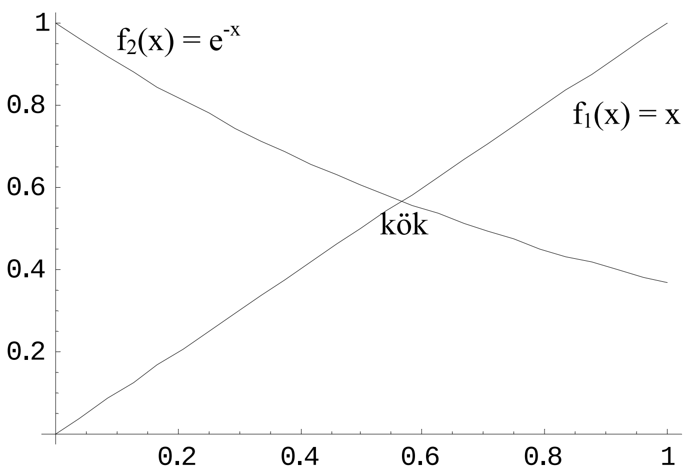
$|\varepsilon_t| = |(x_t - x_i) / x_t|\ 100\ \%$

Örnek 3.4.1

$f(x) = e^{-x} - x$

$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = e^{-x}$

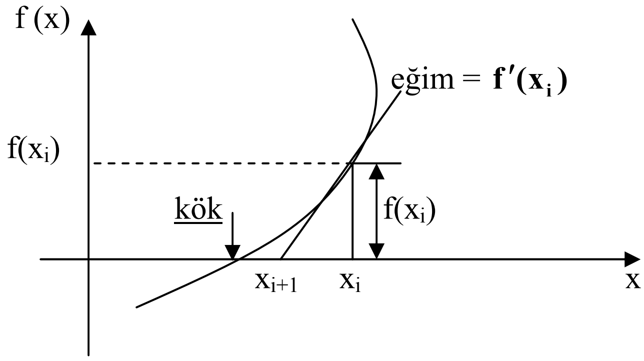




Yukarıdaki eşitliklerle aşağıdaki tablo yazılabilir.

x_i	$x_{i+1} = e^{-X_i}$	$\lvert \varepsilon_t \rvert$ %	$\lvert \varepsilon_a \rvert$ %
0	1	100	100
1	0,36789	76,3	171
0,36789	0,6922	35,1	46,9
0,6922	0,500473	22,1	38,3
0,500473	0,60624	11,8	17,4
0,60624	0,545396	6,89	11,2
0,545396	0,57961	3,83	5,9
0,57961	0,560115	2,2	3,48
0,560115	0,571143	1,24	1,93
0,571143	0,564879	0,705	1,102
0,564879	0,568428	0,399	0,624
0,568428	0,566415	0,226	0,355
0,566415	0,567557	0,128	0,2
0,567557	0,56691	0,07	0,11
0,56691	0,56728	0,04	0,065
0,56728	0,567066	0,014	0,038

3.5 NEWTON – RAPHSON METODU



$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Newton- Raphson yöntemini ayrıca Taylor serisinden çıkarabiliriz ve bu yolla hata analizi de yapılır. Ek 1 deki tek değişkenli f(x) fonksiyonun x_0 noktasında Taylor serisine açılımını göz önüne alalım. Buradaki açılımda x_0 yerine x_i , x yerine x_{i+1} yazarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\,(x_{i+1} - x_i) + f''(\xi)\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)^2$$

Burada ξ , x_i ile x_{i+1} arasında bir değerdir.

1. mertebeden türevi içeren terimlerden sonrakiler alınmaz ve $f(x_{i+1}) = 0$ alınırsa

$$0 \cong f(x_i) + f'(x_i)\,(x_{i+1} - x_i)$$

eşitliği yazılır. Buradan Newton-Raphson yönteminden elde edilen aşağıdaki denklemi elde edilir.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

3.5.1 Newton-Raphson yönteminde hata analizi

x_r : kökün gerçek değeri Taylor serine yerleştirilip bundan yaklaşık denklem çıkarılırsa

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)\,(x_r - x_i) + f''(\xi)\frac{1}{2}(x_r - x_i)^2$$

$$-\quad 0 \cong f(x_i) + f'(x_i)\,(x_{i+1} - x_i)$$

$$0 = f'(x_i)\,(x_r - x_{i+1}) + f''(\xi)\frac{1}{2}(x_r - x_i)^2$$

$E_{t,i} = x_r - x_i$ (önceki gerçek hata) $\qquad$ $E_{t,i+1} = x_r - x_{i+1}$ (gerçek hata)

eşitliklerini yukarıdaki denkleme yerleştirirsek

$$0 = f'(x_i)\,E_{t,i+1} + f''(\xi)\frac{1}{2}E_{t,i}^{\ 2}$$

eşitliğini elde ederiz. Çözümün yakınsadığı düşünülürse x_i ve ξ , x_r gerçek kök değerine yakınsar ve böylece

$$E_{t,i+1} \cong \frac{-f''(x_r)}{2f'(x_r)} E_{t,i}^{\ 2}$$

denkleminden hatanın kabaca önceki hatanın karesiyle orantılı olduğu görülür. (Kuadratik yakınsaklık)

Örnek 3.5.1.1

$f(x) = x^2 - 2x - 3$ (Gerçek çözüm $x_1 = -1$, $x_2 = 3$)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad f'(x) = 2x - 2 \qquad |\varepsilon_a| = |(x_{i+1} - x_i)/x_{i+1}| \ 100\ \%$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^{\ 2} - 2x_i - 3}{2x_i - 2}$$

x_i	x_{i+1}	$\lvert\varepsilon_a\rvert$, %
0	-1,5	100
-1,5	-1,05	43
-1,05	-1,000609756	4,94
-1,000609756	-1,000000093	0,061
-1,000000093	-1	0,000009

3.5.2 Newton – Raphson yönteminin iki bilinmiyenli lineer olmayan denklem sisteminin çözümüne uygulanması

Ek 1 deki iki değişkenli fonksiyonların Taylor serisinde x_0 yerine x_i , y_0 yerine y_i , x yerine x_{i+1} , y yerine y_{i+1} alıp birinci mertebeden türevli terimlerden sonraki terimleri almazsak aşağıdaki denklemi elde ederiz

$$f(x_{i+1}, y_{i+1}) = f(x_i, y_i) + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x}(x_{i+1} - x_i) + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y}(y_{i+1} - y_i)$$

İki bilinmiyenli lineer denklem sistemini

$$u(x,y) = 0$$
$$v(x,y) = 0$$

şeklinde gösterirsek yukarıdaki Taylor serisinden elde edilen eşitliği bu her iki denkleme ayrı ayrı uygulamamız gerekir.

$$u(x_{i+1}, y_{i+1}) = u(x_i, y_i) + \frac{\partial u(x_i, y_i)}{\partial x}(x_{i+1} - x_i) + \frac{\partial u(x_i, y_i)}{\partial y}(y_{i+1} - y_i)$$

$$v(x_{i+1}, y_{i+1}) = v(x_i, y_i) + \frac{\partial v(x_i, y_i)}{\partial x}(x_{i+1} - x_i) + \frac{\partial v(x_i, y_i)}{\partial y}(y_{i+1} - y_i)$$

Sistemin çözümünü aradığımız için

$$u(x_{i+1}, y_{i+1}) = 0$$
$$v(x_{i+1}, y_{i+1}) = 0$$
olmalıdır. Ayrıca
$$u(x_i, y_i) = u_i$$
$$v(x_i, y_i) = v_i$$
alınırsa denklem sistemini aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} x_{i+1} + \frac{\partial u_i}{\partial y} y_{i+1} = -u_i + x_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + y_i \frac{\partial u_i}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} x_{i+1} + \frac{\partial v_i}{\partial y} y_{i+1} = -v_i + x_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + y_i \frac{\partial v_i}{\partial y}$$

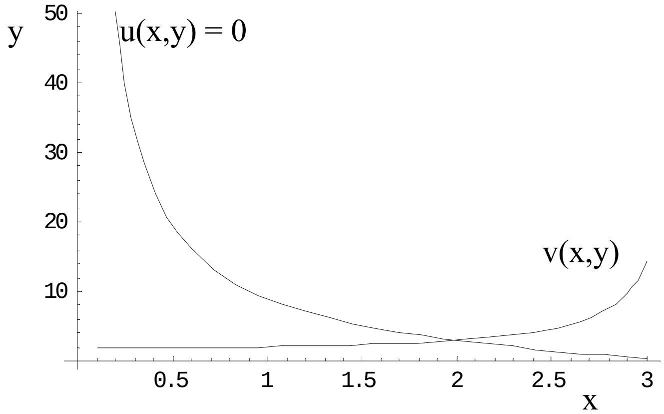
Böylece x_{i+1} ve y_{i+1} büyüklüklerini bilinmiyen kabul eden iki bilinmiyenli lineer denklem sistemini elde edilir. Bu sistem Kramer kuralına göre çözülürse aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u_i \frac{\partial v_i}{\partial y} - v_i \frac{\partial u_i}{\partial y}}{\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial x}}$$

$$y_{i+1} = y_i - \frac{u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial u_i}{\partial x}}{\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial x}}$$

Örnek 3.5.2.1

$u(x,y) = x^2 + x\,y - 10 = 0$
$v(x,y) = y + 3\,x\,y^2 - 57 = 0$



$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y\ , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\ , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3y^2\ , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + 6xy$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^2 + x_i y_i - 10)(1 + 6x_i y_i) - (y_i + 3x_i y_i^2 - 57)x_i}{(2x_i + y_i)(1 + 6x_i y_i) - x_i(3y_i^2)}$$

$$y_{i+1} = y_i - \frac{(x_i^2 + x_i y_i - 10)3y_i^2 - (y_i + 3x_i y_i^2 - 57)(2x_i + y_i)}{(2x_i + y_i)(1 + 6x_i y_i) - x_i(3y_i^2)}$$

x_i	y_i	x_{i+1}	y_{i+1}
1	4	2,176470588	1,941176471
2,176470588	1,941176471	1,900833044	3,215237987
1,900833044	3,215237987	1,999127152	2,997166652
1,999127152	2,997166652	1,999999679	3,000002741
1,999999679	3,000002741	2	3

3.6 SEKANT METODU

Newton-Raphson yöntemi için gerekli olan türev alma işlemi bazı polinom ve fonksiyonlarda zordur. Bu yöntemde türev yerine sonlu farklar türev formülü kullanılır.

$$x_i = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (\text{Newton} - \text{Raphson} \quad \text{Yöntemi})$$

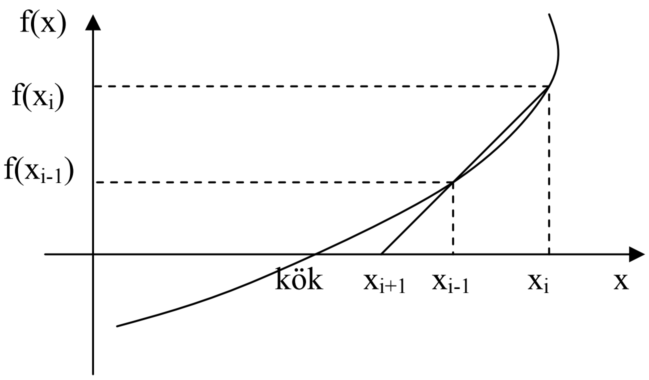
buradaki $f'(x_i)$ yerine

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

yaklaşık değeri alınır. Bu denklemden x_{i+1} aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\,(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

iki değer x_i ve x_{i-1} başlangıçta verilmelidir. Bu başlangıçta verilen iki değer kökün ayrı taraflarında olmak zorunda değildir.



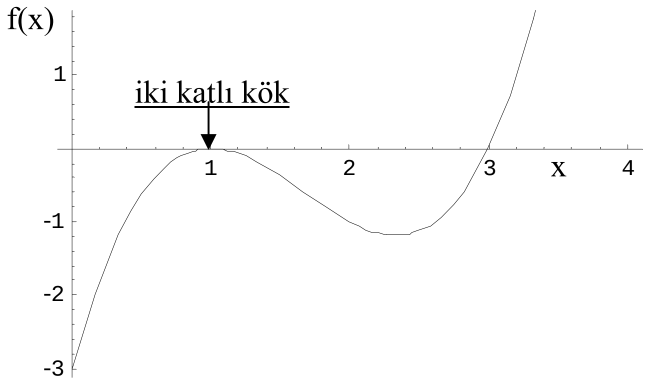
Örnek 3.6.1

$f(x) = x^2 - 2x - 3$ (çözüm $x_1 = -1$, $x_2 = 3$)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^2 - 2x_i - 3)(x_{i-1} - x_i)}{(x_{i-1}^2 - 2x_{i-1} - 3) - (x_i^2 - 2x_i - 3)} \quad , \qquad |\varepsilon_a| = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| 100\,\%$$

	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$|\varepsilon_a|$, %
1	0	-3	-0,6	400
2	-3	-0,6	-0,8571428571	30
3	-0.6	-0,8571428571	-1,016528926	15,7
4	-0,8571428571	-1,016528926	-0,9993904297	1,715
5	-1,016528926	-0,9993904297	-0.9999974911	0,061
6	-0,9993904297	-0.9999974911	-1	0,00025

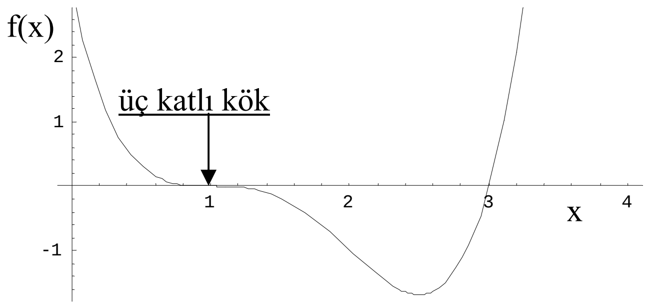
3.7 KATLI KÖKLER



$f(x) = (x-3)(x-1)(x-1)$

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

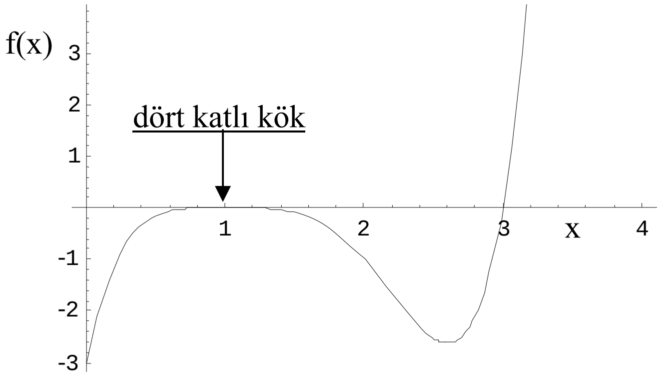
Burada $x = 1$ iki katlı köktür.



$f(x) = (x-3)(x-1)(x-1)(x-1)$

$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$

Burada $x = 1$ 3 katlı köktür.



$f(x) = (x-3)(x-1)(x-1)(x-1)(x-1)$

$f(x) = x^5 - 7x^4 + 18x^3 - 22x^2 + 13x - 3$

Burada $x = 1$ 4 katlı köktür.

$\mathbf{u(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}}$ fonksiyonu ile $\mathbf{f(x)}$ fonksiyonunun kökleri aynıdır.

Bu durumda f(x) yerine u(x) fonksiyonunun kökleri araştırılır. Örnek olarak Newton-Raphson yöntemi uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\mathbf{x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x)}}$$

Bu denklemde $\mathbf{u'(x)}$ yerine $\mathbf{u(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}}$ ifadesinin x 'e göre türevi alınıp konursa

$$\mathbf{u'(x) = \frac{f'(x)\, f'(x) - f(x)\, f''(x)}{[f'(x)]^2}}$$

$$\mathbf{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\, f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)\, f''(x_i)}}$$

katlı kökler için yeniden düzenlenmiş Newton –Raphson yönteminin yaklaşım denklemi elde edilir.

Örnek 3.7.1

f(x) = (x-1) (x-1) $f(x) = x^2 - 2\,x + 1$ (x = 1 iki katlı köktür.)

Standart Newton-Raphson yöntemi ile çözüm

$$\mathbf{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}} \quad , \qquad \mathbf{f'(x) = 2x - 2}$$

$$\mathbf{x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^{\,2} - 2x_i + 1}{2x_i - 2}}$$

x_i	x_{i+1}	$\lvert \varepsilon_a \rvert$ %
0	0,5	100
0,5	0,75	33,33
0,75	0,875	14,29
0,875	0,9375	6,67
0,9375	0,96875	3,226
0,96875	0,984375	1,587
0,984375	0,9921875	0,7874
0,9921875	0,99609375	0,3922
0,99609375	0,998046870	0,1957
0,998046870	0,999023435	0,0978

Örnek 3.7.2

f(x) = (x-3) (x-1) (x-1)

$f(x) = x^3 - 5\,x^2 + 7\,x - 3$

Standart Newton-Raphson yöntemi ile çözüm için

$$\mathbf{f'(x) = 3x^2 - 10x + 7 \quad , \quad f''(x) = 6x - 10}$$

eşitliklerini [3.1.5. (1)]denkleminde yerine yazarsak

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^{\,3} - 5x_i^{\,2} + 7x_i - 3}{3x_i^{\,2} - 10x_i + 7}$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemi kullanarak aşağıdaki tabloyu düzenleyebiliriz.

x_i	x_{i+1}	$\lvert \varepsilon_a \rvert$, %
0	0,4285714286	100
0,4285714286	0,6857142857	37,5
0,6857142857	0,8328654005	17,668
0,8328654005	0,9133298932	8,81
0,9133298932	0,9557832929	4,441
0,9557832929	0,9776551012	2,237
0,9776551012	0,9887661674	1,1237
0,9887661674	0,9943674405	0,5631
0,9943674405	0,9971797707	0,282
0,9971797707	0,9985888917	0,141
0,9985888917	0,9992941948	0,0706

Geliştirilmiş Newton-Raphson yöntemi için elde edilen

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^{\,3} - 5x_i^{\,2} + 7x_i - 3)\,(3x_i^{\,2} - 10x_i + 7)}{(3x_i^{\,2} - 10x_i + 7)^2\;(x_i^{\,3} - 5x_i^{\,2} + 7x_i - 3)\,(6x_i - 10)}$$

eşitliğini kullanarak aşağıdaki tablo oluşturulur.

x_i	x_{i+1}	$\lvert \varepsilon_a \rvert$, %
0	1,105263158	100
1,105263158	1,003081664	10,1868
1,003081664	1,000002393	0,308
1,000002393	1,000002393	0

4 LİNEER DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Önceki bölümde tek bir $\mathbf{f(x)=0}$ denklemini sağlayan x değerlerinin bulunuşu anlatıldı. Şimdi ise

$$\mathbf{f_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \qquad (i = 1,2,3,...,n)}$$

şeklinde n adet denklemi aynı anda sağlayan $\mathbf{x_1, x_2, x_3, ..., x_n}$ değerleri araştırılacaktır.

Eğer bu $\mathbf{f_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0}$ denklemleri aşağıdaki gibi olursa bu denklem sistemine lineer denklem sistemi denir.

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \cdot\;\cdot\;\cdot\;, + a_{1n}\,x_n = c_1 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \cdot\;\cdot\;\cdot\;, + a_{2n}\,x_n = c_2 \\
a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + \cdot\;\cdot\;\cdot\;, + a_{3n}\,x_n = c_3 \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot\;\cdot\;\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot\;\cdot\;\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot\;\cdot\;\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + a_{n3}\,x_3 + \cdot\;\cdot\;\cdot\;, + a_{nn}\,x_n = c_n
\end{array}
$$

Burada a_{ij} , c_i sabitlerdir.

Lineer denklem sisteminin matris gösterilimi

$[\,A\,]\ \{x\} = \{\,C\,\}$ şeklindedir.

Buradan çözüm matrisi

$\{\,x\,\} = [\,A\,]^{-1}\,\{C\}$

şeklinde yazılır. Bu matrisler aşağıdaki gibi açık şekilde yazılabilir.

$$
[A] = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\
. & . & . & . & . & . & . \; . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn}
\end{bmatrix}, \qquad
[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad
[C] = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix}
$$

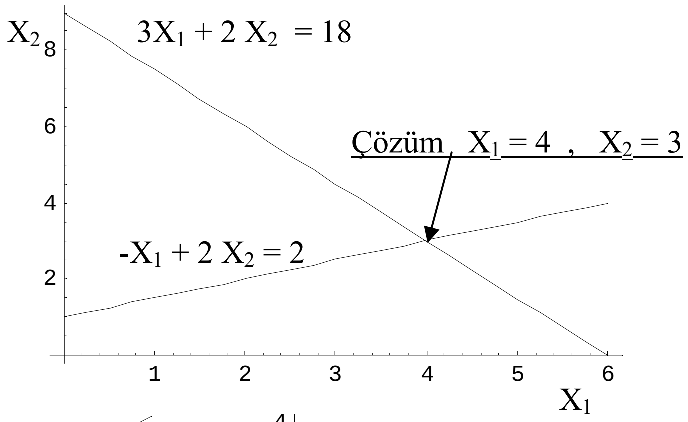
Lineer denklem sisteminin çözümünde aşağıdaki metodlar uygulanır.
1.Grafik metodu.
2.Determinantlar ve Cramer kuralı.
3. Bilinmiyenlerin eliminasyonu (yok edilmesi)
4. Gauss Eliminasyon metodu
5. Ters matris metodu (Gauss – Jordan yöntemi).
6. İterasyon yöntemi (Gauss – Seidel yöntemi)
7. Alt üst üçgen matrislere ayırma metodu.
8. Karekök metodu (Cholesky yöntemi , simetrik bant matrisler için).

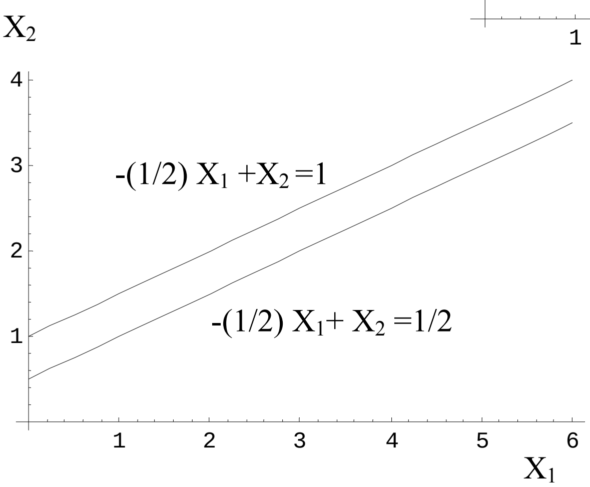
4.1 GRAFİK METODU

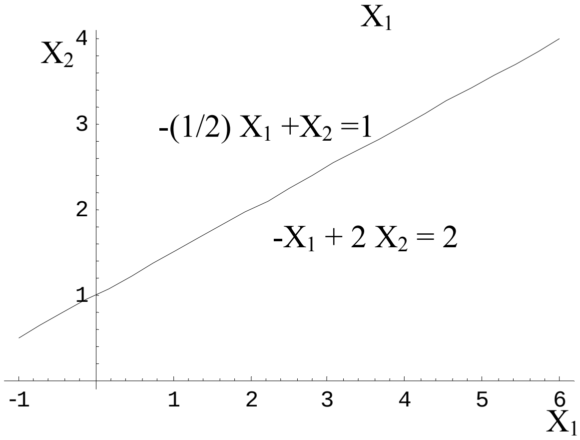
Bu yöntem ikiden fazla bilinmiyen içeren denklem sistemlerine uygulanamaz. Fakat çözümün geometri yardımı ile yorumu yapılabilir.

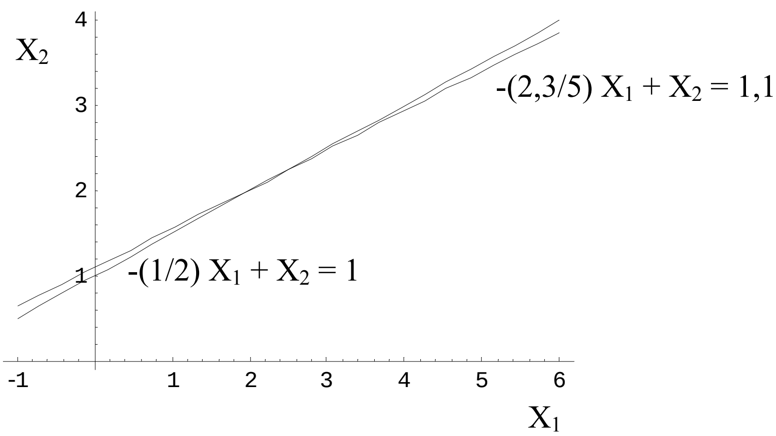
Örnek 4.1.1

$3\ X_1 + 2\ X_2 = 18$
$-\ X_1 + 2\ X_2 = 2$









4.2 DETERMİNANTLAR VE CRAMER KURALI

Bu yöntem 3 den fazla bilinmiyenli denklem sistemleri için kullanışlı değildir.

Üç Bilinmiyenli denklem sistemi için bu yöntemi aşağıdaki gibi uygulanır.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D} \quad , \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D} \quad , \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}}{D}$$

Örnek 4.2.1

$$0{,}3x_1 + 0{,}52x_2 + x_3 = 0{,}01$$
$$0{,}5x_1 + x_2 + 1{,}9x_3 = 0{,}67$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}5x_3 = -0{,}44$$

$$D = \begin{vmatrix} 0{,}3 & 0{,}52 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 1{,}9 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{vmatrix} = -0{,}0022 \qquad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -0{,}01 & 0{,}52 & 1 \\ 0{,}67 & 1 & 1{,}9 \\ -0{,}44 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{vmatrix}}{D} = \frac{0{,}03278}{-0{,}0022} = -14{,}9$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}3 & -0{,}01 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}67 & 1{,}9 \\ 0{,}1 & -0{,}44 & 0{,}5 \end{vmatrix}}{D} = \frac{0{,}0649}{-0{,}0022} = -29{,}5 \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}3 & 0{,}52 & -0{,}01 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}67 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & -0{,}44 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-0{,}04356}{-0{,}0022} = 19{,}8$$

4.3 BİLİNMİYENLERİN ELİMİNASYONU (yok edilmesi) YÖNTEMİ

Bu yöntemi iki bilinmiyenli lineer denklem sistemleri üzerinde gösterelim.

(1) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1$

(2) $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2$

(1) denklemi $\mathbf{a_{21}}$, (2) denklemi $-\mathbf{a_{11}}$ ile çarpılıp toplanırsa $\mathbf{x_1}$ yok edilmiş olur.

$\mathbf{a_{21} * (1) - a_{11}(2)}$

$$\mathbf{a_{21} * (1)} \quad = \quad \mathbf{a_{21}a_{11}x_1 + a_{21}a_{12}x_2 = a_{21}c_1}$$

$$\mathbf{-a_{11} * (2)} \quad = \quad \mathbf{-a_{11}a_{21}x_1 - a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}c_2}$$

$+$ ______________________________

$$\mathbf{a_{21} * (1) - a_{11}(2)} = \mathbf{(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22})\,x_2 = a_{21}c_1 - a_{11}c_2}$$

$$\mathbf{x_2 = \frac{a_{21}c_1 - a_{11}c_2}{a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}}}$$

Bu $\mathbf{x_2}$ değeri (1) denkleminde yerine yerleştirilirse

$$\mathbf{x_1 = \frac{a_{21}c_1 - a_{21}a_{12}x_2}{a_{21}a_{11}}}$$

Örnek 4.3.1

$$\mathbf{3x_1 + 2x_2 = 18}$$
$$\mathbf{-x_1 + 2x_2 = 2}$$

$$\mathbf{x_2 = \frac{-1(18) - 3(2)}{-1(2) - 3(2)} = 3} \quad , \qquad \mathbf{x_1 = \frac{-1(18) - (-1)2(3)}{-1(3)} = 4}$$

4.4 GAUSS ELİMİNASYONU METODU

Bilinmiyenlerin eliminasyonu yönteminin sistematik hale getirilmiş şeklidir.Bu yöntem lineer denklem sistemlerine aşağıdaki şekilde uygulanır.

$$
\begin{array}{ll}
(1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\
(2) & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\
(3) & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = c_3 \\
\vdots & \vdots \\
(n) & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n
\end{array}
$$

İlk önce (1) denklemi dışındaki bütün denklemlerde x_1 yok edilir. Bunun için (1) dışındaki bütün denklemlere aşağıdaki işlem uygulanır.

$$
(i) - \frac{a_{i1}}{a_{11}} * (1) \qquad i = 2,3,\ldots,n
$$

Bu işlem uygulandıktan sonra denklem sistemi aşağıdaki duruma gelir.

$$
\begin{array}{ll}
(1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\
(2') & \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = c'_2 \\
(3') & \qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n = c'_3 \\
 & \qquad \vdots \\
(n') & \qquad a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \cdots + a'_{nn}x_n = c'_n
\end{array}
$$

Benzer şekilde ikinci denklemden itibaren sonraki denklemlerde sıra ile $x_2, x_3, \ldots, x_n$ bilinmiyenleride yok edilirse aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$
\begin{array}{ll}
(1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\
(2') & \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = c'_2 \\
(3'') & \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n = c''_3 \\
 & \qquad\qquad\qquad \ddots \\
(n^{(n-1)}) & \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = c_n^{(n-1)}
\end{array}
$$

Bu sistemde x_n bilinmiyeninden başlayarak geriye doğru yerine koyma işlemi ile bütün bilinmiyenler aşağıdaki formüller ile hesaplanır .

$$\mathbf{x_n = \frac{c_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}}$$

$$\mathbf{x_i = \frac{c_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}} \qquad i = n-1\,,\, n-2\,,\, \ldots\,,\, 1}$$

Örnek 4.4.1

(1) $\quad 3x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}2x_3 = 7{,}85$

(2) $\quad 0{,}1x_1 + 7x_2 - 0{,}3x_3 = -19{,}3$

(3) $\quad 0{,}3x_1 - 0{,}2x_2 + 10x_3 = 71{,}4$

Bu denklem sistemine $(2) - \frac{0{,}1}{3} * (1)$ ve $(3) - \frac{0{,}3}{3} * (1)$ işlemleri yapılırsa

(1) $\quad 3x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}2x_3 = 7{,}85$

(1) $\quad 3\ x_1 \ - \ 0{,}1\ x_2 \ - \ 0{,}2\ x_3 = 7{,}85$

(2′) $\quad (0{,}1 - \frac{0{,}1}{3} * 3)x_1 + [7 - \frac{0{,}1}{3} * (-0{,}1)]x_2 + [-0{,}3 - \frac{0{,}1}{3} * (-0{,}2)]x_3 = -19{,}3 - \frac{0{,}1}{3} * 7{,}85$

(3′) $\quad (0{,}3 - \frac{0{,}3}{3} * 3)x_1 - [0{,}2 - \frac{0{,}3}{3} * (-0{,}1)]x_2 + [10 - \frac{0{,}3}{3} * (-0{,}2)]x_3 = 71{,}4 - \frac{0{,}3}{3} * 7{,}85$

(1) $\quad 3x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}2x_3 = 7{,}85$

(2′) $\quad 7{,}00333x_2 - 0{,}293333x_3 = -19{,}5617$

(3′) $\quad -0{,}19x_2 + 10{,}02x_3 = 70{,}6150$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemde son satıra $(3') - \frac{(-0{,}19)}{7{,}0033} * (2')$ işlemi yapılırsa

(1) $\quad 3x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}2x_3 = 7{,}85$

(2′) $\quad 7{,}00333x_2 - 0{,}293333x_3 = -19{,}5617$

(3″) $\quad 10{,}012x_3 = 70{,}0843$

Bu son elde edilen sistemden bilinmiyenler son denklemden ilk denkleme doğru yerine koyma ile elde edilir.

Son (3″) denkleminden $x_3 = \frac{70{,}0843}{10{,}0120} = 7{,}00003$ bulunur. Bu x_3 değeri ile (2′) denklemine gidilip oradan x_2 hesaplanır

$$7{,}00333\ x_2 - 0{,}293333\ (7{,}00003) = -19{,}5617$$

$$x_2 = -2{,}5$$

Bulunan bu x_2 ve x_3 değerlerini (1) denkleminde yerine yerleştirerek x_1 bilinmiyenide çözülür.

$$3x_1 - 0{,}1\,(-2{,}5) - 0{,}2\,(7{,}00003) = 7{,}85 \qquad\qquad x_1 = 3$$

Örnek 4.4.2

$(x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = -1 \quad , \quad x_3 = 5 \quad , \quad x_4 = 2)$

$$\begin{aligned}
4x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 15 \\
3x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\
2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 &= 26 \\
x_1 \ - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 27
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 & 15 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -1 & 26 \\ 1 & -1 & 3 & 4 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 & 15 \\ 3 - \frac{3}{4} * 4 & 1 - \frac{3}{4} * (-2) & -2 - \frac{3}{4} * (-1) & 1 - \frac{3}{4} * 3 & 0 - \frac{3}{4} * 15 \\ 2 - \frac{2}{4} * 4 & 3 - \frac{2}{4} * (-2) & 5 - \frac{2}{4} * (-1) & -1 - \frac{2}{4} * 3 & 26 - \frac{2}{4} * 15 \\ 1 - \frac{1}{4} * 4 & -1 - \frac{1}{4} * (-2) & 3 - \frac{1}{4}(-1) & 4 - \frac{1}{4} * 3 & 27 - \frac{1}{4} * 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 & 15 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}25 & -1{,}25 & -11{,}25 \\ 0 & 4 & 5{,}5 & -2{,}5 & 18{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & 3{,}25 & 3{,}25 & 23{,}25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 & 15 \\ 0 & 2,5 & -1,25 & -1,25 & -11,25 \\ 0 & 4-\dfrac{4}{2,5}*2,5 & 5,5-\dfrac{4}{2,5}*(-1,25) & -2,5-\dfrac{4}{2,5}*(-1,25) & 18,5-\dfrac{4}{2,5}*(-11,25) \\ 0 & -0,5-\dfrac{(-0,5)}{2,5}*2,5 & 3,25-\dfrac{(-0,5)}{2,5}*(-1,25) & 3,25-\dfrac{(-0,5)}{2,5}*(-1,25) & 23,25-\dfrac{(-0,5)}{2,5}*(-11,25) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 & 15 \\ 0 & 2,5 & -1,25 & -1,25 & -11,25 \\ 0 & 0 & 7,5 & -0,5 & 36,5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 & 15 \\ 0 & 2,5 & -1,25 & -1,25 & -11,25 \\ 0 & 0 & 7,5 & -0,5 & 36,5 \\ 0 & 0 & 3-\dfrac{3}{7,5}*7,5 & 3-\dfrac{3}{7,5}*(-0,5) & 21-\dfrac{3}{7,5}*(36,5) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 & 15 \\ 0 & 2,5 & -1,25 & -1,25 & -11,25 \\ 0 & 0 & 7,5 & -0,5 & 36,5 \\ 0 & 0 & 0 & 3,2 & 6,4 \end{bmatrix}$$

$$3,2x_4 = 6,4 \;, \qquad x_4 = \frac{6,4}{3,2} \;, \qquad x_4 = 2$$

$$7,5x_3 - 0,5*2 = 36,5 \;, \qquad x_3 = \frac{36,5+0,5*2}{7,5} \;, \qquad x_3 = 5$$

$$2,5x_2 - 1,25*5 - 1,25*2 = -11,25 \qquad x_2 = \frac{-11,25+6,25+2,5}{2,5} \;, \qquad x_2 = -1$$

$$4x_1 - 2(-1) - 1*5 + 3*2 = 15 \qquad x_4 = \frac{15-2+5-6}{4} \;, \qquad x_1 = 3$$

Elde edilen çözüm değerlerinin sağlanması

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4*3+(-2)*(-1)+(-1)*5+3*2 \\ 3*3+1*(-1)+(-2)*5+1*2 \\ 2*3+3*(-1)+5*5+(-1)*2 \\ 1*3+(-1)*(-1)+3*5+4*2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix}$$

4.5 GAUSS-JOURDAN METODU

Bu yöntemde $[A]\{x\}=\{c\}$ denklem sistemi her iki tarafı $[A]^{-1}$ ile soldan çarpılarak $[I]\{x\}=[A]^{-1}\{c\}$ Sistemine dönüştürülür.

Örnek 4.5.1

$$
\begin{aligned}
4x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 15\\
3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0\\
2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 &= 26\\
x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 27
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 26 \\ 27 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 & 15 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -1 & 26 \\ 1 & -1 & 3 & 4 & 27 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 4/4 & -2/4 & -1/4 & 3/4 & 15/4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -1 & 26 \\ 1 & -1 & 3 & 4 & 27 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & -0{,}25 & 0{,}75 & 3{,}75 \\
3-3*1 & 1-3*(-0{,}5) & -2-3*(-0{,}25) & 1-3*0{,}75 & 0-3*3{,}75 \\
2-2*1 & 3-2*(-0{,}5) & 5-2*(-0{,}25) & -1-2*(0{,}75) & 26-2*3{,}75 \\
1-1*1 & -1-1*(-0{,}5) & 3-1*(-0{,}25) & 4-1*(0{,}75) & 27-1*3{,}75 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & -0{,}25 & 0{,}75 & 3{,}75 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}25 & -1{,}25 & -11{,}25 \\ 0 & 4 & 5{,}5 & -2{,}5 & 18{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & 3{,}25 & 3{,}25 & 23{,}25 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -0{,}5+0{,}5*1 & -0{,}25+0{,}5(-0{,}5) & 0{,}75+0{,}5(-0{,}5) & 3{,}75+0{,}5*(-4{,}5) \\
0 & 1 & -0{,}5 & -0{,}5 & -4{,}5 \\
0 & 4-4*1 & 5{,}5-4*(-0{,}5) & -2{,}5-4*(-0{,}5) & 18{,}5-4*(-4{,}5) \\
0 & -0{,}5+0{,}5*1 & 3{,}25+0{,}5*(-0{,}5) & 3{,}25+0{,}5(-0{,}5) & 23{,}25+0{,}5(-4{,}5) \end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,5 & 0,5 & 1,5 \\ 0 & 1 & -0,5 & -0,5 & -4,5 \\ 0 & 0 & 7,5 & -0,5 & 36,5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,5+0,5*1 & 0,5+0,5*(-0,06667) & 1,5+0,5(4,86667) \\ 0 & 1 & -0,5+0,5*1 & -0,5+0,5*(-0,06667) & -4,5+0,5*4,86667 \\ 0 & 0 & 1 & -0,06667 & 4,86667 \\ 0 & 0 & 3-3*1 & 3-3(-0,06667) & 21-3*4,86667 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,46665 & 3,9333 \\ 0 & 1 & 0 & -0,5333 & -2,0666 \\ 0 & 0 & 1 & -0,06667 & 4,86667 \\ 0 & 0 & 0 & 3,2 & 6,4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,46665-0,4665*1 & 3,9333-0,4665*2 \\ 0 & 1 & 0 & -0,5333+0,533*1 & -2,0666+0,533*2 \\ 0 & 0 & 1 & -0,06667+0,0667*1 & 4,86667+0,0667*2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Bu elde edilen arttırılmış matris aşağıdaki arttırılmış matrise eşit olduğundan

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & 2 \end{bmatrix}$$

böylece

$x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$, $x_4 = 2$

çözüm değerleri bulunmuş olur.

4.6 TERS MATRİS METODU

Ters matris yönteminde aynı katsayılar matrisine sahip lineer denklem sistemlerinde farklı İkinci taraf vektörleri için çözümler daha kolay elde edilir.

4.6.1 Gauss-Jordan yönteminin matrislerin tersinin bulunmasına uygulanışı

$[A]\{x\}=\{c\}$ denklem sisteminin her iki tarafı $[A]^{-1}$ ile çarpılırsa

$\{x\}=[A]^{-1}\{c\}$ elde edilir.

$[A]$ matrisi ile aşağıdaki gibi n tane denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ . \\ . \\ y_{1n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ . \\ . \\ y_{2n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad . \; . \; . \; . \; ,$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{n1} \\ y_{n2} \\ . \\ . \\ y_{nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Bu n tane sistem

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} & \dots & y_{n1} \\ y_{12} & y_{22} & \dots & y_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ y_{1n} & y_{2n} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A][Y]=[I] \quad \rightarrow \quad [Y]=[A]^{-1}$$

şeklinde gösterilebilir. Buradan yazılacak $[A\ I]$ arttırılmış matrisi $[I\ K]$ (yani $[I][Y]=[K] \rightarrow [Y]=[K]$) matrisine dönüştürülürse $[K]=[A]^{-1}$ elde edilir.
Çünkü $[A][Y]=[I]$ olduğuna göre $[I][Y]=[K]$ olur . Ayrıca $[Y]=[A]^{-1}$ ve birim matrisle bir matrisin çarpımı kendisine eşit olduğundan $[I][Y]=[Y]$ dır.
buradan $[Y]=[K]$ ve sonuç olarak $[K]=[A]^{-1}$ bulunur.

$$\left[\begin{array}{ccccccc|ccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn} & . & . & . & . & . & . & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & k_{11} & k_{12} & k_{13} & . & . & . & k_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & k_{21} & k_{22} & k_{23} & . & . & . & k_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & k_{31} & k_{32} & k_{33} & . & . & . & k_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & . & . & . & k_{nn} \end{array}\right]$$

Örnek 4.6.1.1

$$3x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}2x_3 = 7{,}85$$
$$0{,}1x_1 + 7x_2 - 0{,}3x_3 = -19{,}3$$
$$0{,}3x_1 - 0{,}2x_2 + 10x_3 = 71{,}4$$

$$3x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}2x_3 = 20$$
$$0{,}1x_1 + 7x_2 - 0{,}3x_3 = 50$$
$$0{,}3x_1 - 0{,}2x_2 + 10x_3 = 15$$

denklem sistemlerini çözünüz.

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 3/3 & -0{,}1/3 & -0{,}2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}0333333 & -0{,}0666667 & 0{,}333333 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}0333333 & -0{,}0666667 & 0{,}333333 & 0 & 0 \\ 0{,}1-0{,}1*1 & 7-0{,}1*(-0{,}0333333) & -0{,}3-0{,}1*\left(-0{,}0666667\right) & 0-0{,}1*0{,}333333 & 1 & 0 \\ 0{,}3-0{,}3*1 & -0{,}2-0{,}3*\left(-0{,}0333333\right) & 10-0{,}3\left(-0{,}0666667\right) & 0-0{,}3*0{,}333333 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}0333333 & -0{,}0666667 & 0{,}333333 & 0 & 0 \\ 0 & 7{,}00333 & -0{,}293333 & -0{,}0333333 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}190000 & 10{,}0200 & -0{,}1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}0333333 & -0{,}0666667 & 0{,}333333 & 0 & 0 \\ 0 & 7{,}00333/7{,}00333 & -0{,}293333/7{,}00333 & -0{,}0333333/7{,}00333 & 1/7{,}00333 & 0 \\ 0 & -0{,}190000 & 10{,}0200 & -0{,}1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}0333333 & -0{,}0666667 & 0{,}333333 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}0417061 & -0{,}00473933 & 0{,}142180 & 0 \\ 0 & -0{,}190000 & 10{,}0200 & -0{,}1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}033+0{,}033*1 & -0{,}067+0{,}033*\left(-0{,}0417\right) & 0{,}333+0{,}033 & 0{,}033*0{,}142 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}041706 & -0{,}0047393 & 0{,}142180 & 0 \\ 0 & -0{,}19+0{,}19*1 & 10{,}02+0{,}19*\left(-0{,}0417\right) & -0{,}1+0{,}19*(-0{,}0047) & 0{,}19*0{,}142 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}068057 & 0{,}333175 & 0{,}004739329 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}0417061 & -0{,}00473933 & 0{,}142180 & 0 \\ 0 & 0 & 10{,}0121 & -0{,}10090 & 0{,}0270142 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}068057 & 0{,}333175 & 0{,}004739329 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}0417061 & -0{,}00473933 & 0{,}142180 & 0 \\ 0 & 0 & 10{,}0121/10{,}0121 & -0{,}10090/10{,}0121 & 0{,}0270142/10{,}0121 & 1/10{,}0121 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}068057 & 0{,}333175 & 0{,}004739329 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}0417061 & -0{,}00473933 & 0{,}142180 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}0100778 & 0{,}0026981 & 0{,}0998791 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,068+0,068 & 0,333+0,068*(-0,01) & 0,0047+0,068*0,0027 & 0,068*0,1 \\ 0 & 1 & -0,0417+0,0417 & -0,0047+0,0417*(-0,01) & 0,142+0,0417*0,0027 & 0,417*0,1 \\ 0 & 0 & 1 & -0,01008 & 0,0027 & 0,099879 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,332489 & 0,00492297 & 0,00679813 \\ 0 & 1 & 0 & -0,0051644 & 0,142293 & 0,00418346 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0100779 & 0,00269816 & 0,0998801 \end{bmatrix}$$

$$\left[A^{-1}\right] = \begin{bmatrix} 0,332489 & 0,00492297 & 0,00679813 \\ -0,0051644 & 0,142293 & 0,00418346 \\ -0,0100779 & 0,00269816 & 0,0998801 \end{bmatrix}$$

Böylece katsayılar matrisi $[A]$ olan Bütün sistemlerin çözümü:

$$\{x\} = [A]^{-1}\{c\}$$

denklemi ile elde edilir.

İlk sistemin çözümü:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,332489 & 0,00492297 & 0,00679813 \\ -0,0051644 & 0,142293 & 0,00418346 \\ -0,0100779 & 0,00269816 & 0,0998801 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 7,85 \\ -19,3 \\ 71,4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,0004118 \\ -2,488016 \\ 7,0002531 \end{Bmatrix}$$

ikinci sistemin çözümü:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,332489 & 0,00492297 & 0,00679813 \\ -0,0051644 & 0,142293 & 0,00418346 \\ -0,0100779 & 0,00269816 & 0,0998801 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 20 \\ 50 \\ 15 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6,9979 \\ 7,07411 \\ 1,43955 \end{Bmatrix}$$

Örnek 4.6.1.2

$$[A]=\begin{bmatrix}4 & -2 & -1 & 3\\ 3 & 1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 3 & 4\end{bmatrix} \qquad \{c\}=\begin{bmatrix}15\\ 0\\ 26\\ 27\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4 & -2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -0{,}5 & -0{,}25 & 0{,}75 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0\\ 3-3(1) & 1-3(-0{,}5) & -2-3(-0{,}25) & 1-3(0{,}75) & 0-3(0{,}25) & 1 & 0 & 0\\ 2-2(1) & 3-2(-0{,}5) & 5-2(-0{,}25) & -1-2(0{,}75) & 0-2(0{,}25) & 0 & 1 & 0\\ 1-1(1) & -1-1(-0{,}5) & 3-1(-0{,}25) & 4-1(0{,}75) & 0-1(0{,}25) & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -0{,}5 & -0{,}25 & 0{,}75 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2{,}5 & -1{,}25 & -1{,}25 & -0{,}75 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 5{,}5 & -2{,}5 & -0{,}5 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -0{,}5 & 3{,}25 & 3{,}25 & -0{,}25 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -0{,}5+0{,}5(1) & -0{,}25+0{,}5(-0{,}5) & 0{,}75+0{,}5(-0{,}5) & 0{,}25+0{,}5(-0{,}3) & 0+0{,}5(0{,}4) & 0 & 0\\ 0 & 1 & -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}3 & 0{,}4 & 0 & 0\\ 0 & 4-4(1) & 5{,}5-4(-0{,}5) & -2{,}5-4(-0{,}5) & -0{,}5-4(-0{,}3) & 0 & 1 & 0\\ 0 & -0{,}5+0{,}5(1) & 3{,}25+0{,}5(-0{,}5) & 3{,}25+0{,}5(-0{,}5) & -0{,}25+0{,}5(-0{,}3) & 0+0{,}5(0{,}4) & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}3 & 0{,}4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 7{,}5 & -0{,}5 & 07 & -1{,}6 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3 & -0{,}4 & 0{,}2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -0{,}5+0{,}5 & 0{,}5+0{,}5(-0{,}0667) & 0{,}1+0{,}5*0{,}0933 & 0{,}2+0{,}5(-0{,}213) & 0{,}5*0{,}133 & 0\\ 0 & 1 & -0{,}5+0{,}5 & -0{,}5+0{,}5(-0{,}0667) & -0{,}3+0{,}5*0{,}933 & 0{,}4+0{,}5(-0{,}213) & 0{,}5*0{,}133 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -0{,}0667 & 0{,}933 & -0{,}213 & 0{,}133 & 0\\ 0 & 0 & 3-3*1 & 3-3(-0{,}0667) & -0{,}4-3*0{,}0933 & 0{,}2-3(-0{,}213) & 0-3*0{,}133 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,4667 & 0,1466 & 0,0933 & 0,0666 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0,533 & -0,2533 & 0,2933 & 0,0666 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0667 & 0,0933 & -0,2133 & 0,1333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,2 & -0,68 & 0,84 & -0,4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,47-0,47 & 0,146-0,47(0,21) & 0,093-0,47(0,26) & 0,06-0,47(-0,12) & 0,47*0,31 \\ 0 & 1 & 0 & -0,533 & -0,253 & 0,293 & 0,06+0,53(-0,12) & 0,53*0,31 \\ 0 & 0 & 1 & -0,067 & 0,093 & -0,213 & 0,13+0,067(-0,12) & 0,067*0,31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,2125 & 0,2625 & -0,125 & 0,3125 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0,2458 & -0,0292 & 0,125 & -0,1458 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0,3666 & 0,43335 & 0 & 0,1666 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,0788 & -0,1958 & 0,125 & 0,0208 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,2125 & 0,2625 & -0,125 & 0,3125 \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2458 & -0,0292 & 0,125 & -0,1458 \\ -0,3666 & 0,43335 & 0 & 0,1666 \\ 0,0788 & -0,1958 & 0,125 & 0,0208 \\ -0,2125 & 0,2625 & -0,125 & 0,3125 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2458 & -0,0292 & 0,125 & -0,1458 \\ -0,3666 & 0,43335 & 0 & 0,1666 \\ 0,0788 & -0,1958 & 0,125 & 0,0208 \\ -0,2125 & 0,2625 & -0,125 & 0,3125 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 15 \\ 0 \\ 26 \\ 27 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,2458*15-0,0292*0+0,125*26-0,1458*27 \\ -0,3666*15+0,43335*0+0*26+0,1666*27 \\ 0,0788*15-0,1958*0+0,125*26+0,0208*27 \\ -0,2125*15+0,2625*0-0,125*26*0,3125*27 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

4.7 LİNEER DENKLEM SİSTEMİNİN ALT ÜST ÜÇGEN MATRİSLERE AYIRMA METODU İLE ÇÖZÜMÜ:

$[A]\{x\}=\{C\}$, $[A]\{x\}-\{C\}=\{0\}$

$[U]\{x\}=\{D\}$, $[U]\{x\}-\{D\}=\{0\}$

$[L]\ \{\,[U]\{x\}-\{D\}\,\}=[A]\{x\}-\{C\}$

$[L][U]=[A]$ (Burada $[L]$ alt üçgen matris , $[U]$ ise üst üçgen matristir.

$[L]\{D\}=\{C\}$ Bu son denklemden $\{D\}$ çözülüp.

$[U]\{x\}=\{D\}$ denkleminde yerine konup $\{x\}$ bilinmeyen vektörü bu denklemden hesaplanır.

4.7.1 Gauss eliminasyon yöntemi ile alt üst üçgen matrislere ayırma işlemi

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[L]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & . & . & . & 1 \end{bmatrix} , \qquad [U]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & . & . & . & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & . & . & . & a''_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a^{(n-1)}_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[A]=[L][U]=$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ f_{21}a_{11} & f_{21}a_{12}+a'_{12} & f_{21}a_{13}+a'_{23} & \cdots & f_{21}a_{1n}+a'_{2n} \\ f_{31}a_{11} & f_{31}a_{12}+f_{32}a'_{22} & f_{31}a_{13}+f_{32}a'_{23}+a''_{33} & \cdots & f_{31}a_{1n}+f_{32}a'_{2n}+a''_{3n} \\ . & & & \cdots & . \\ . & & & \cdots & . \\ f_{n1}a_{11} & f_{n1}a_{12}+f_{n2}a'_{22} & f_{n1}a_{13}+f_{n2}a'_{23}+f_{n3}a''_{33} & \cdots & f_{n1}a_{1n}+f_{n2}a'_{2n}+f_{n3}a''_{3n}+\cdots+f_{n(n-1)}a^{(n-2)}_{(n-1)n}+a^{(n-1)}_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f_{21}a_{11} = a_{21} \quad \Rightarrow \quad f_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}}$$

$$\mathbf{f_{31}a_{11} = a_{31} \quad \Rightarrow \quad f_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}}$$

Bu durumu diğer bütün $\mathbf{f_{i1}}$ ler için genelleştirirsek

$$\mathbf{f_{i1}a_{11} = a_{i1} \quad \Rightarrow \quad f_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}}$$ Burada $\mathbf{i = 2,3,...,n}$ dir.

elde ederiz.

$$\mathbf{f_{31}a_{12} + f_{32}a'_{22} = a_{32} \quad \Rightarrow \quad f_{32} = \left(a_{32} - f_{31}a_{12}\right)/\,a'_{22} \quad \Rightarrow \quad f_{32} = (a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12})\,/\,a'_{22}}$$

$$\mathbf{f_{41}a_{12} + f_{42}a'_{22} = a_{42} \quad \Rightarrow \quad f_{42} = \left(a_{42} - f_{41}a_{12}\right)/\,a'_{22} \quad \Rightarrow \quad f_{42} = (a_{42} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{12})\,/\,a'_{22}}$$

Bu işlemler $\mathbf{f_{i2}}$ için genelleştirilebilir.

$$\mathbf{f_{i1}a_{12} + f_{i2}a'_{22} = a_{i2} \quad \Rightarrow \quad f_{i2} = \left(a_{i2} - f_{i1}a_{12}\right)/\,a'_{22} \quad \Rightarrow \quad f_{i2} = (a_{i2} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{12})\,/\,a'_{22}}$$

Burada $\mathbf{i = 3,4,...,n}$ dır.

$$\mathbf{f_{41}a_{13} + f_{42}a'_{23} + f_{43}a''_{33} = a_{43} \quad \Rightarrow \quad f_{43} = (a_{43} - f_{41}a_{13} - f_{42}a'_{23})\,/\,a''_{33}}$$

Bu eşitlik genelleştirilirse

$$\mathbf{f_{i1}a_{13} + f_{i2}a'_{23} + f_{i3}a''_{33} = a_{i3} \quad \Rightarrow \quad f_{i3} = (a_{i3} - f_{i1}a_{13} - f_{i2}a'_{23})\,/\,a''_{33}}$$

Burada $\mathbf{i = 4,5,...,n}$ dır.
Benzer şekilde devam edilirse sonunda

$$\mathbf{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ f_{21}a_{11} & f_{21}a_{12} + a'_{12} & f_{21}a_{13} + a'_{23} & \cdots & f_{21}a_{1n} + a'_{2n} \\ f_{31}a_{11} & f_{31}a_{12} + f_{32}a'_{22} & f_{31}a_{13} + f_{32}a'_{23} + a''_{33} & \cdots & f_{31}a_{1n} + f_{32}a'_{2n} + a''_{3n} \\ . & & & \cdots & . \\ . & & & \cdots & . \\ f_{n1}a_{11} & f_{n1}a_{12} + f_{n2}a'_{22} & f_{n1}a_{13} + f_{n2}a'_{23} + f_{n3}a''_{33} & \cdots & f_{n1}a_{1n} + f_{n2}a'_{2n} + f_{n3}a''_{3n} + \cdots + f_{n(n-1)}a^{(n-2)}_{(n-1)n} + a^{(n-1)}_{nn} \end{bmatrix}}$$

matrisi elde edilir.

Örnek 4.7.1.1

$$[A]=\begin{bmatrix}4 & -2 & -1 & 3\\ 3 & 1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 3 & 4\end{bmatrix} \qquad \{C\}=\begin{bmatrix}15\\ 0\\ 26\\ 27\end{bmatrix}$$

$$[A]=[L][U]$$

$$[L]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ f_{21} & 1 & 0 & 0\\ f_{31} & f_{32} & 1 & 0\\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 1\end{bmatrix} \qquad [U]=\begin{bmatrix}4 & -2 & -1 & 3\\ 0 & 2{,}5 & -1{,}25 & -1{,}25\\ 0 & 0 & 7{,}5 & -0{,}5\\ 0 & 0 & 0 & 3{,}2\end{bmatrix}$$

$$f_{21}4 = a_{21} \quad \Rightarrow \quad f_{21} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$f_{31}4 = a_{31} \quad \Rightarrow \quad f_{31} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

$$f_{41}4 = a_{41} \quad \Rightarrow \quad f_{41} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$f_{31}(-2) + f_{32}2{,}5 = a_{32} \quad \Rightarrow \quad f_{32} = [3 - 0{,}5(-2)]/2{,}5 \quad \Rightarrow \quad f_{32} = 1{,}6$$

$$f_{41}(-2) + f_{42}2{,}5 = a_{42} \quad \Rightarrow \quad f_{42} = [-1 - 0{,}25(-2)]/2{,}5 \quad \Rightarrow \quad f_{42} = -0{,}2$$

$$f_{41}(-1) + f_{42}(-1{,}25) + f_{43}7{,}5 = a_{43} \quad \Rightarrow \quad f_{43} = (3 + 0{,}25 - 0{,}2 * 1{,}25)/7{,}5 \quad \Rightarrow \quad f_{43} = 0{,}4$$

$$[L]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}75 & 1 & 0 & 0\\ 0{,}5 & 1{,}6 & 1 & 0\\ 0{,}25 & -0{,}2 & 0{,}4 & 1\end{bmatrix}$$

$$[L]\{D\} = \{C\}, \qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}75 & 1 & 0 & 0\\ 0{,}5 & 1{,}6 & 1 & 0\\ 0{,}25 & -0{,}2 & 0{,}4 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\\ d_4\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}15\\ 0\\ 26\\ 27\end{Bmatrix}$$

$$d_1 = 15$$

$$0{,}75d_1 + d_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad d_2 = -0{,}75 * 15 \quad \Rightarrow \quad d_2 = -11{,}25$$

$$0{,}5d_1 + 1{,}6d_2 + d_3 = 26 \quad \Rightarrow \quad d_3 = 26 - 0{,}5*15 - 1{,}6*(-11{,}25) \quad \Rightarrow \quad d_3 = 36{,}5$$

$$0{,}25d_1 - 0{,}2d_2 + 0{,}4d_3 + d_4 = 27 \quad \Rightarrow \quad d_4 = -0{,}25*15 - 0{,}2*11{,}25 - 0{,}4*36{,}5 + 27 \quad \Rightarrow \quad d_4 = 6{,}4$$

$$[U]\{x\} = \{D\}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}25 & -1{,}25 \\ 0 & 0 & 7{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 3{,}2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ -11{,}25 \\ 36{,}5 \\ 6{,}4 \end{Bmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

4.7.2 Crout Bileşenlere ayırma yöntemi : (Crout decomposition)

n=4 üzerinde gösterilişi :

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = a_{11}\ , \qquad l_{21} = a_{21}\ , \qquad l_{31} = a_{31}\ , \qquad l_{41} = a_{41}$$

$$l_{i1} = a_{i1} \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$l_{11}u_{12} = a_{12} \qquad l_{11}u_{13} = a_{13} \qquad l_{11}u_{14} = a_{14}$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} \qquad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} \qquad u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}}$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \quad , \quad j = 2,3,\ldots,n$$

$$l_{21}u_{12} + l_{22} = a_{22} \quad , \qquad l_{31}u_{12} + l_{32} = a_{32} \quad , \qquad l_{41}u_{12} + l_{42} = a_{42}$$

$$l_{i1}u_{12} + l_{i2} = a_{i2} \quad \Rightarrow \quad l_{i2} = a_{i2} - l_{i1}u_{12} \quad , \quad i = 2,3,\cdots,n$$

$$l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = a_{23} \quad \Rightarrow \quad u_{23} = (a_{23} - l_{21}u_{13})/l_{22}$$

$$l_{21}u_{14} + l_{22}u_{24} = a_{24} \quad \Rightarrow \quad u_{24} = (a_{24} - l_{21}u_{14})/l_{22}$$

$$l_{21}u_{1j} + l_{22}u_{2j} = a_{2j} \quad \Rightarrow \quad u_{2j} = (a_{2j} - l_{21}u_{1j})/l_{22} \quad , \qquad j = 3,4,\cdots,n$$

$$l_{i3} = a_{i3} - l_{i1}u_{13} - l_{i2}u_{23} \quad , \quad i = 3,4,\cdots,n$$

$$u_{3j} = (a_{3j} - l_{31}u_{1j} - l_{32}u_{2j}) / l_{33} \quad , \quad j = 4,5,\cdots,n$$

$$l_{i4} = a_{i4} - l_{i1}u_{14} - l_{i2}u_{24} - l_{i3}u_{34} \quad , \quad i = 4,5,\cdots,n$$

Crout alt üst üçgen matrislere ayırma yönteminin herhangi bir n sayısı için formülleri:

$$l_{i1} = a_{i1} \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \quad , \quad j = 2,3,\ldots,n$$

$j = 2,3,\cdots,n-1$ için

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{kj}u_{kj} \quad , \quad i = j, j+1, j+2, \ldots, n$$

$$u_{kj} = \frac{a_{jk} - \sum_{i=1}^{j-1} l_{ji}u_{ik}}{l_{jj}} \quad , \quad k = j+1, j+2, \cdots, n$$

$$l_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn}$$

Örnek 4.7.2.1

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$l_{i1} = a_{i1} \quad , \quad i = 1,2,3,4$$

$$l_{11} = a_{11} = 4 \; , \quad l_{21} = a_{21} = 3 \; , \quad l_{31} = a_{31} = 2 \quad , \quad l_{41} = a_{41} = 1$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \quad , \quad j = 2,3,4$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{-2}{4} \quad \Rightarrow \quad u_{12} = -0{,}5 \qquad\qquad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{-1}{4} \quad \Rightarrow \quad u_{13} = -0{,}25$$

$$u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad u_{14} = 0{,}75$$

$\mathbf{j = 2,3}$ için

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{kj} u_{kj} \quad , \quad i = j, j+1, 4$$

$$u_{kj} = \frac{a_{jk} - \sum_{i=1}^{j-1} l_{ji} u_{ik}}{l_{jj}} \quad , \quad k = j+1, 4$$

$$l_{44} = a_{44} - \sum_{k=1}^{3} l_{4k} u_{k4}$$

$\mathbf{j = 2}$ ve $\mathbf{i = 3}$ için $\quad l_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12} = 1 - 3(-0{,}5) \;\Rightarrow\; l_{22} = 2{,}5$

$\mathbf{j = 2}$ ve $\mathbf{i = 3}$ için $\quad l_{32} = a_{32} - l_{31} u_{12} = 3 - 2(-0{,}5) \;\Rightarrow\; l_{32} = 4$

$\mathbf{j = 2}$ ve $\mathbf{i = 4}$ için $\quad l_{42} = a_{42} - l_{41} u_{12} = -1 - 1(-0{,}5) \;\Rightarrow\; l_{42} = -0{,}5$

$\mathbf{j = 3}$ ve $\mathbf{i = 3}$ için $\quad l_{33} = a_{33} - l_{31} u_{13} - l_{32} u_{23} = 5 - 2(-0{,}25) - 4(-0{,}5) \;\Rightarrow\; l_{33} = 7{,}5$

$\mathbf{j = 3}$ ve $\mathbf{i = 4}$ için $\quad l_{43} = a_{43} - l_{41} u_{13} - l_{42} u_{23} = 3 - 1(-0{,}25) - (-0{,}5)(-0{,}5) \;\Rightarrow\; l_{43} = 3$

$\mathbf{j = 2}$ ve $\mathbf{k = 3}$ için $\quad u_{23} = (a_{23} - l_{21} u_{13}) / l_{22} = [(-2 - 3(-0{,}25)] / 2{,}5 \;\Rightarrow\; u_{23} = -0{,}5$

$\mathbf{j = 2}$ ve $\mathbf{k = 4}$ için $\quad u_{24} = (a_{24} - l_{21} u_{14}) / l_{22} = [1 - 3(0{,}75)] / 2{,}5 \;\Rightarrow\; u_{24} = -0{,}5$

$\mathbf{j = 3}$ ve $\mathbf{k = 4}$ için

$$u_{34} = (a_{34} - l_{31} u_{14} - l_{32} u_{24}) / l_{33} = [-1 - 2(0{,}75) - 4(-0{,}5)] / 7{,}5 \;\Rightarrow\; u_{34} = -0{,}06667$$

son olarak

$$l_{44} = a_{44} - l_{41} u_{14} - l_{42} u_{24} - l_{43} u_{34} = 3 - 1(0{,}75) - (-0{,}5)(-0{,}5) - 3(0{,}06667) \;\Rightarrow\; l_{44} = 3{,}2$$

bulunur.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2{,}5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7{,}5 & 0 \\ 1 & -0{,}5 & 3 & 3{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & -0{,}25 & 0{,}75 \\ 0 & 1 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}6667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu elde edilen alt ve üst üçgen matrislerin denklem sisteminin çözümüne uygulanışı

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 0 \\ 26 \\ 27 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2,5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7,5 & 0 \\ 1 & -0,5 & 3 & 3,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 0 \\ 26 \\ 27 \end{Bmatrix}$$

$4d_1 = 15 \quad d_1 = 15/4 \quad \Rightarrow \quad d_1 = 3,75$

$3d_1 + 2,5d_2 = 0 \quad d_2 = -3 * 3,75 / 2,5 \quad \Rightarrow \quad d_2 = -4,5$

$2d_1 + 4d_2 + 7,5d_3 = 26 \quad d_3 = [26 - 2 * 3,75 - 4 * (-4,5)] / 7,5 \quad \Rightarrow \quad d_3 = 4,86667$

$d_1 - 0,5d_2 + 3d_3 + 3,2d_4 = 27 \quad d_4 = (27 - 3,75 - 0,5 * 4,5 - 3 * 4,86667) / 3,2 \quad \Rightarrow \quad d_4 = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,25 & 0,75 \\ 0 & 1 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & -0,6667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,75 \\ -4,5 \\ 4,86667 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$x_4 = 2$
$x_3 - 0,06667 * x_4 = 4,86667 \quad x_3 = 4,86667 + 0,06667 * 2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 5$
$x_2 - 0,5x_3 - 0,5x_4 = -4,5 \quad x_2 = -4,5 + 0,5 * 5 + 0,5 * 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1$
$x_1 - 0,5x_2 - 0,25x_3 + 0,75x_4 = 3,75 \quad x_1 = 3,75 + 0,5 * (-1) + 0,25 * 5 - 0,75 * 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$

4.8 KAREKÖK METODU (Cholesky yöntemi) :

Bu yöntem simetrik ve pozitif tanumlı katsayılar matrisi için uygulanır. Özellikle bu durumdaki bant matrislerde uygulanır.

$[A]$ pozitif tanımlı olmalıdır.

Yani bütün $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{Bmatrix} \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{Bmatrix}$ vektörleri için

$Q = \{x\}^T [A] \{x\} \quad Q > 0$ olmalıdır veya

$$A_1 = a_{11} \;, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \;, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \;, \; . \;\; . \;\; . \;, \quad A_n = \det[A]$$

hepsinin pozitif olması gerekir.

$[A] = [L][U]$

$[A]^T = [U]^T [L]^T$

Simetrik matrislerde $[A] = [A]^T$ olduğundan

$[A] = [L][L]^T$ olur.

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & . & . & . & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & . & . & . & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & . & . & . & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & . & . & . & l_{n2} \\ 0 & 0 & l_{33} & . & . & . & l_{n3} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & l_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & . & . & . & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & & . & . & . & a_{n2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{n3} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$l_{11} l_{11} = a_{11} \quad \Rightarrow \quad l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{11} l_{21} = a_{21} \quad \Rightarrow \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}}$$

$$l_{11} l_{i1} = a_{i1} \quad \Rightarrow \quad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}} \quad , \quad i = 2,3,\cdots,n$$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22} \quad \Rightarrow \quad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

$$l_{21} l_{31} + l_{22} l_{32} = a_{32} \quad \Rightarrow \quad l_{32} = (a_{32} - l_{21} l_{31}) / l_{22}$$

$$l_{21} l_{i1} + l_{22} l_{i2} = a_{i2} \quad \Rightarrow \quad l_{i2} = (a_{i2} - l_{21} l_{i1}) / l_{22} \quad , \qquad i = 3,4,\cdots,n$$

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = a_{33} \quad \Rightarrow \quad l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}$$

$$l_{31} l_{41} + l_{32} l_{42} + l_{33} l_{43} = a_{43} \quad \Rightarrow \quad l_{43} = (a_{43} - l_{31} l_{41} - l_{32} l_{42}) / l_{33}$$

$$l_{31} l_{i1} + l_{32} l_{i2} + l_{33} l_{i3} = a_{i3} \quad \Rightarrow \quad l_{i3} = (a_{i3} - l_{31} l_{i1} - l_{32} l_{i2}) / l_{33} \qquad i = 4,\cdots,n$$

$k = 1,2,\cdots,n$ için genel formül:

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

$$l_{ki} = (a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} l_{kj}) / l_{ii} \quad , \qquad i = 1,2,\cdots,k-1$$

Bu işlemlerin sonucunda elde edilen $[L]$ matrisi denklem sisteminin çözümünde aşağıdaki eşitlikler yardımıyla kullanılır.

$[L]\{D\} = \{C\}$ denkleminden elde edilen $\{D\}$ sütun matrisi

$[L]^T\{x\} = \{D\}$ denkleminde yerine konup $\{x\}$ istenen çözüm matrisi bulunur.

$$d_1 = \frac{c_1}{l_{11}}$$

$$d_i = (c_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} d_j) / l_{ii} \quad , \qquad i = 2,3,\cdots,n$$

$$l_{nn} x_n = d_n \quad \rightarrow \quad x_n = \frac{d_n}{l_{nn}}$$

$$x_i = [d_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji} x_j] / l_{ii} \quad , \qquad i = n-1, n-2, \cdots, 1$$

Örnek 4.8.1

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21 \\ 27 \\ 29 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$l_{11}^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad l_{11} = 2$$

$$l_{11}l_{21} = 3 \quad \Rightarrow \quad l_{21} = 1{,}5 \;, \qquad l_{11}l_{31} = 2 \quad \Rightarrow \quad l_{31} = 1 \;, \qquad l_{11}l_{41} = 1 \quad \Rightarrow \quad l_{41} = 0{,}5$$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 6 \quad \Rightarrow \quad l_{22} = \sqrt{6 - (1{,}5)^2} \quad \Rightarrow \quad l_{22} = 1{,}9365$$

$$l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = 4 \quad \Rightarrow \quad l_{32} = (4 - 1{,}5 * 1)/1{,}9365 \quad \Rightarrow \quad l_{32} = 1{,}291$$

$$l_{21}l_{41} + l_{22}l_{42} = 2 \quad \Rightarrow \quad l_{42} = (2 - 1{,}5 * 0{,}5)/1{,}9365 \quad \Rightarrow \quad l_{42} = 0{,}6455$$

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad l_{33} = \sqrt{5 - 1^2 - (1{,}291)^2} \quad \Rightarrow \quad l_{33} = 1{,}5275$$

$$l_{31}l_{41} + l_{32} * l_{42} + l_{33}l_{43} = 1 \quad \Rightarrow \quad l_{43} = (1 - 1 * 0{,}5 - 1{,}291 * 0{,}6455)/1{,}5275 \Rightarrow l_{43} = -0{,}2182$$

$$l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad l_{44} = \sqrt{3 - 0{,}5^2 - 0{,}6455^2 - (-0{,}2182)^2} \quad \Rightarrow \quad l_{44} = 1{,}5119$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 1{,}9365 & 0 & 0 \\ 1 & 1{,}291 & 1{,}5275 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}6455 & -0{,}2182 & 1{,}5119 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21 \\ 27 \\ 29 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

$$2d_1 = 21 \quad \Rightarrow \quad d_1 = 10{,}5$$

$$1{,}5d_1 + 1{,}9365d_2 = 27 \quad \Rightarrow \quad d_2 = (27 - 1{,}5 * 10{,}5)/1{,}9365 \quad \Rightarrow \quad d_2 = 5{,}81$$

$$d_1 + 1{,}291d_2 + 1{,}5275d_3 = 29 \quad \Rightarrow \quad d_3 = (29 - 10{,}5 - 1{,}291 * 5{,}81)/1{,}5275 \Rightarrow d_3 = 7{,}2$$

$$0{,}5d_1 + 0{,}6455d_2 - 0{,}2182d_3 + 1{,}5119d_4 = 12 \quad d_4 = 3{,}02$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 1{,}9365 & 1{,}291 & 0{,}6455 \\ 0 & 0 & 1{,}5275 & -0{,}2182 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}5119 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10{,}5 \\ 5{,}81 \\ 7{,}2 \\ 3{,}02 \end{Bmatrix}$$

$$1{,}5119x_4 = 3{,}02 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 2$$

$$1{,}5275x_3 - 0{,}2182x_4 = 7{,}2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = (7{,}2 + 0{,}2182 * 2)/1{,}5275 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 5$$

$$1{,}9365x_2 + 1{,}291x_3 + 0{,}6455x_4 = 5{,}81 \quad \Rightarrow \quad x_2 = (5{,}81 - 1{,}291 * 5 - 0{,}6455 * 2)/1{,}9365$$

$$x_2 = -1$$

$$2x_1 + 1{,}5x_2 + x_3 + 0{,}5x_4 = 10{,}5 \quad \Rightarrow \quad x_1 = (10{,}5 - 1{,}5(-1) - 5 - 0{,}5 * 2)/2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$$

4.9 İTERASYON YÖNTEMİ (Gauss – Seidel yöntemi) :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= c_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= c_3 \\
\vdots \qquad & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= c_n
\end{aligned}
$$

Denklem sisteminde her $\boldsymbol{i}$. denklemden x_i leri çözüp aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n)/a_{11} \\
x_2 &= (c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n)/a_{22} \\
x_3 &= (c_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \cdots - a_{3n}x_n)/a_{33} \\
&\vdots \\
x_n &= (c_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n(n-1)}x_{n-1})/a_{nn}
\end{aligned}
$$

$$
\left|\varepsilon_{a,i}\right| = \left|\frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j}\right| 100\%
$$

Örnek 4.9.1

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}2x_3 &= 7{,}85 \\
0{,}1x_1 + 7x_2 - 0{,}3x_3 &= -19{,}3 \\
0{,}3x_1 - 0{,}2x_2 + 10x_3 &= 71{,}4
\end{aligned}
$$

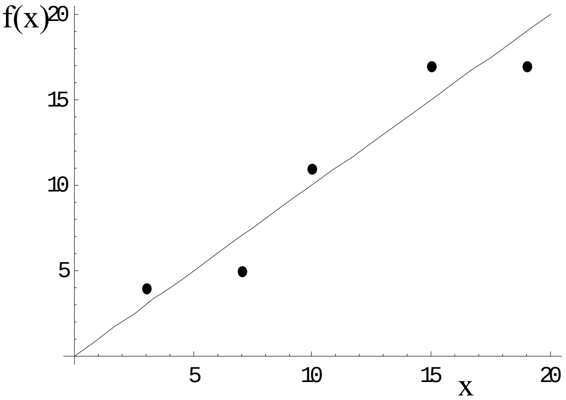
Denklem sisteminin iterasyon yöntemi ile çözümü için aşağıdaki denklemler kullanılır.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (7{,}85 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3)/3 \\
x_2 &= (-19{,}3 - 0{,}1x_1 + 0{,}3x_3)/7 \\
x_3 &= (71{,}4 - 0{,}3x_1 + 0{,}2x_2)/10
\end{aligned}
$$

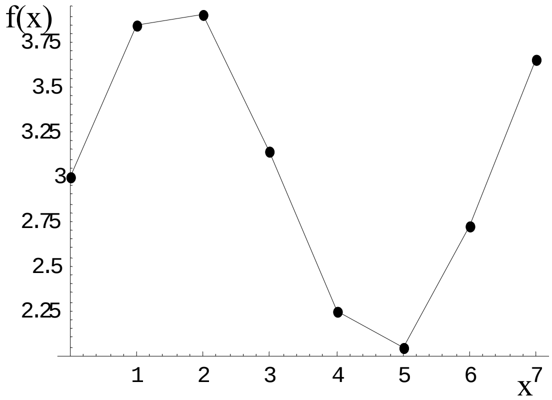
Bu denklemler yardımı ile aşağıdaki tablo oluşturulur.

	x_1	x_2	x_3	$\lvert \varepsilon_{a,1} \rvert$, %	$\lvert \varepsilon_{a,2} \rvert$, %	$\lvert \varepsilon_{a,3} \rvert$, %
	2,61666666	0	0			
	2,61666666	-2,7945238	0			
	2,61666666	-2,7945238	7,005609524			
2	2,99055650	-2,7945238	7,005609524	12,5		
2	2,99055650	-2,4996246	7,005609524		11,8	
2	2,99055650	-2,4996246	7,000290811			11,8

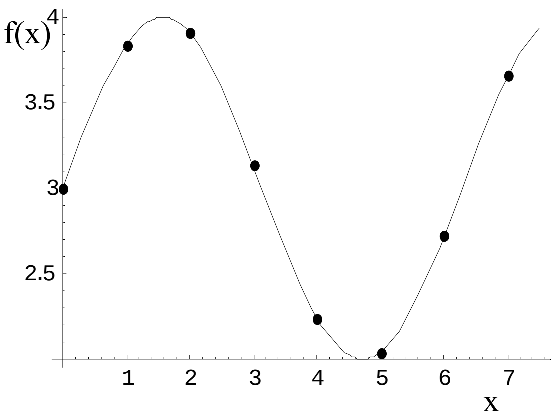
5 EĞRİYE UYDURMA



Doğruya yaklaştırma lineer regression



Lineer interpolasyon



Eğrisel interpolasyon

5.1 YAKLAŞTIRMA (Regression) METODU

5.1.1 Doğruya yaklaştırma (Lineer regression) yöntemi:

Bu yöntemde doğruya yaklaşımdaki hataların karelerinin toplamını minumum yapacak doğru denklemi araştırılır.
Hatayı içerecek şekilde doğru denklemi:

$$\mathbf{y = a_0 + a_1 x + E}$$

seklindedir. Burada **E** hatayı gösterir.

$$\mathbf{E = y - a_0 - a_1 x}$$

Hataların karelerinin toplamı:

$$\mathbf{S_r = \sum_{i=1}^{n} E_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2}$$

şeklinde yazılır. Bu elde edilen hataların karelerinin toplamını minumum yapacak $\mathbf{a_0}$ ve $\mathbf{a_1}$ değeri bunlara göre alınacak türevleri sıfıra eşitliyerek bulunur.

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0 \qquad \frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 x_i)\, x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 = 0$$

$$n a_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i a_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$a_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \qquad a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - a_1 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}}$$ Tahmini standart sapma :

$$S_y = \sqrt{\frac{S_t}{n-1}}$$ Toplam standart sapma : Burada $S_t = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$ tanım katsayısı : $\mathbf{r}$ correlation katsayısı:

Örnek 5.1.1.1

Aşağıdaki tablo değerlerini bir doğruya yaklaştırın.

i	y_i	$(y_i - \bar{y})^2$	$y_i - a_0 - a_1 x$
1	0,5	8,5765	0,1687
2	2,5	0,8622	0,5625
3	2,0	2,0408	0,3473
4	4,0	0,3265	0,3265
5	3,5	0,0051	0,5896
6	6,0	6,6122	0,7972
7	5,5	4,2908	0,1993
$\sum$	24	22,7143	2,9911

Bu tablodaki verilerden ve aşağıdaki eşitliklerden

$$\mathbf{n = 7}\ ,\quad \sum_{i=1}^{7} x_i y_i = 119{,}5\ ,\quad \sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 140\ ,\quad \sum_{i=1}^{7} x_i = 28\ ,\quad \bar{x} = \frac{28}{7} = 4$$

$$\sum_{i=1}^{7} y_i = 24\ ,\quad \bar{y} = \frac{24}{7} = 3{,}428571429$$

elde edilen bu değerleri kullanarak doğru denklemi için gerekli katsayılar hesaplanır.

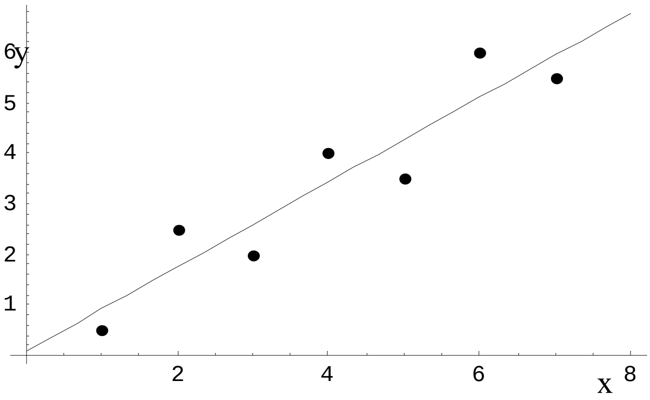
$$a_1 = \frac{7 * 119{,}5 - 28 * 24}{7 * 140 - (28)^2} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0{,}839285714$$

$$a_0 = 3{,}428571429 - 0{,}839285714 * 4 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0{,}07142857$$

ve doğru denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$y = 0{,}07142857 + 0{,}839285714\ x$$

Bu doğrunun grafiği ve tablo değerleri aşağıdaki şekilden izlenebilir.



$$S_y = \sqrt{\frac{22{,}7143}{7-1}} = 1{,}9457 \quad \text{(Toplam standart sapma)}$$

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{2{,}9911}{7-2}} = 0{,}7735 \quad \text{(Standart tahmini hata)}$$

$S_{y/x} < S_y$ olduğundan bu örnek için doğruya yaklaştırma uygun bir seçimdir.

5.1.2 Polinoma yaklaştırma metodu

$$\mathbf{y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m + E}$$

Burada **E** hata veya resüdü

$$\mathbf{E = y - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_m x^m}$$

$$\mathbf{S_r = \sum_{i=1}^{n} (y - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_m x^m)^2}$$

Bu hataların karelerinin toplamı $\mathbf{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m}$ katsayılarına göre ayrı ayrı türevleri alınırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m) = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m) = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m) = 0$$

. . . .

. . . .

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_m} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i^m (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m) = 0$$

Türev işlemi sonunda bulunan bu denklemler sıfıra eşitlenip tekrar düzenlenirse aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \cdots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^m = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \cdots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \cdots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} + \cdots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} = \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i$$

Bu denklem sisteminden $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ çözülür.

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-(m+1)}}$$ Standart tahmini hata.

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$ korelasyon (ilişki ,bağlantı) katsayısı

$$S_t = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

Örnek 5.1.2.1

Aşağıdaki tabloda bulunan x_i , y_i değerlerini 2.dereceden polinoma yaklaştırın.

x_i	y_i	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)$
0	2,1	544,44	0,14332
1	7,7	314,47	1,00286
2	13,6	140,03	1,08158
3	27,2	3,12	0,80491
4	40,09	239,22	0,61951
5	61,1	1272,11	0,09439
$\sum$	152,6	2513,39	3,74657

$m = 2$, $n = 6$, $\bar{x} = 2{,}5$, $\bar{y} = 25{,}433$, $\sum_{i=1}^{5} x_i = 15$, $\sum_{i=1}^{5} y_i = 152{,}6$

$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 55$, $\sum_{i=1}^{5} x_i^3 = 225$, $\sum_{i=1}^{5} x_i^4 = 979$, $\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 585{,}6$, $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i = 2488{,}8$

$$\mathbf{a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i}$$
$$\mathbf{a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$$
$$\mathbf{a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i}$$

Yukarıda bulduğumuz $\mathbf{a_i}$ bilinmiyenlerinin katsayılarını bu denklem sisteminde yerine konursa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

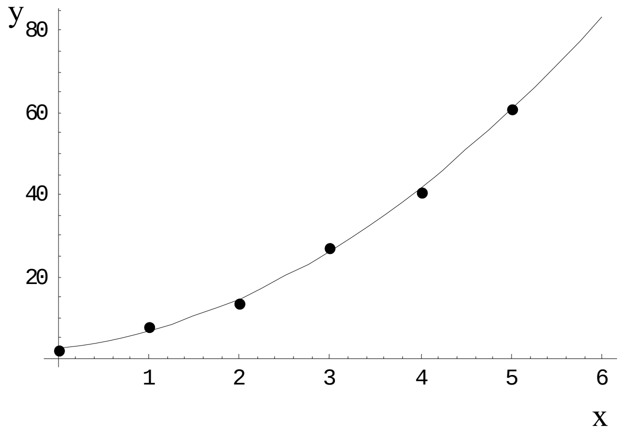
$$\mathbf{6a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 152{,}6}$$
$$\mathbf{15a_0 + 55a_1 + 225a_2 = 585{,}6}$$
$$\mathbf{55a_0 + 225a_1 + 979a_2 = 2488{,}8}$$

Bu denklem sisteminin çözümünden bulunan

$\mathbf{a_0 = 2{,}47857}$, $\mathbf{a_1 = 2{,}35929}$, $\mathbf{a_2 = 1{,}86071}$

değerleri ile aşağıda çizilen 2. derecen polinom yazılır.

$$\mathbf{y = 2{,}47857 + 2{,}35929x + 1{,}86071x^2}$$



$$\mathbf{S_{y/x} = \sqrt{\frac{3{,}74657}{6-3}} = 1{,}12} \quad \text{(Standart tahmini hata)}$$

$$\mathbf{r^2 = \frac{2513{,}39 - 3{,}74657}{2513{,}39}} \quad \text{(kararlılık katsayısı)}$$

$\mathbf{r = 0{,}99925}$ (Bu sonuç uyumun çok iyi olduğunu gösterir.)

5.1.3 İki değişkenli lineer bağıntılarda tablo değerlerini lineer denkleme çekmek

Burada doğru denklemi düzlem denklemi haline dönüşür.

$$\mathbf{y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + E}$$
$$\mathbf{E = y - a_0 - a_1x_1 - a_2x_2}$$

hatasının karelerinin toplamı

$$\mathbf{S_r = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1x_{1i} - a_2x_{2i})^2}$$

şeklinde yazılır. Bu denklemin aynı şekilde $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ bilinmiyen katsayılarına göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1x_{1i} - a_2x_{2i}) = 0$$
$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n}x_{1i}(y_i - a_0 - a_1x_{1i} - a_2x_{2i}) = 0$$
$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{n}x_{2i}(y_i - a_0 - a_1x_{1i} - a_2x_{2i}) = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler sıfıra eşitlenip **a** katsayılarına göre düzenlenirse 3 bilinmiyenli 3 tane lineer denklem yazılır.

$$\mathbf{a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} = \sum_{i=1}^{n} y_i}$$

$$\mathbf{a_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i}$$

$$\mathbf{a_0 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i}$$

Bu denklem sistemi aşağıdaki gibi matris formunda yazılabilir.

$$\mathbf{\begin{bmatrix} n & \sum x_{1i} & \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i} x_{2i} \\ \sum x_{2i} & \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1i} y_i \\ \sum x_{2i} y_i \end{Bmatrix}}$$

5.1.4 Çok değişkenli lineer bağıntılarda tablo değerlerini lineer denkleme çekmek

$$\mathbf{y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_m x_m + E}$$

denklemindeki E hatasının karelerinin toplamı ve türevleri yukarıdaki gibi düzenlenirse aşağıdaki matris formundaki denklem sistemini elde ederiz.

$$\mathbf{\begin{bmatrix} n & \sum x_{1i} & \sum x_{2i} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \sum x_{mi} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i} x_{2i} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \sum x_{1i} x_{mi} \\ \sum x_{2i} & \sum x_{2i} x_{1i} & \sum x_{2i}^2 & \cdot\ \cdot\ \cdot & \sum x_{2i} x_{mi} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \sum x_{mi} & \sum x_{mi} x_{1i} & \sum x_{mi} x_{2i} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \sum x_{mi}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1i} y_i \\ \sum x_{2i} y_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum x_{mi} y_i \end{Bmatrix}}$$

$$\mathbf{S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-(m+1)}}} \qquad \text{(standart tahmini hata)}$$

Örnek 5.1.4.1

Aşağıdaki iki değişkenli tablo değerlerini iki değişkenli lineer denkleme uydurun.

x_1	x_2	y	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	x_1y	x_2y
0	0	5	0	0	0	0	0
2	1	10	4	1	2	20	10
2,	2	9	6,25	4	5	22,5	18
1	3	0	1	9	3	0	0
4	6	3	16	36	24	12	18
7	2	27	49	4	14	189	54
$\sum$ 16,	14	54	76,25	54	48	243,5	100

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1i} & \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}x_{2i} \\ \sum x_{2i} & \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1i}y_i \\ \sum x_{2i}y_i \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 16,5 & 14 \\ 16,5 & 76,25 & 48 \\ 14 & 48 & 54 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 54 \\ 243,5 \\ 100 \end{Bmatrix}$$

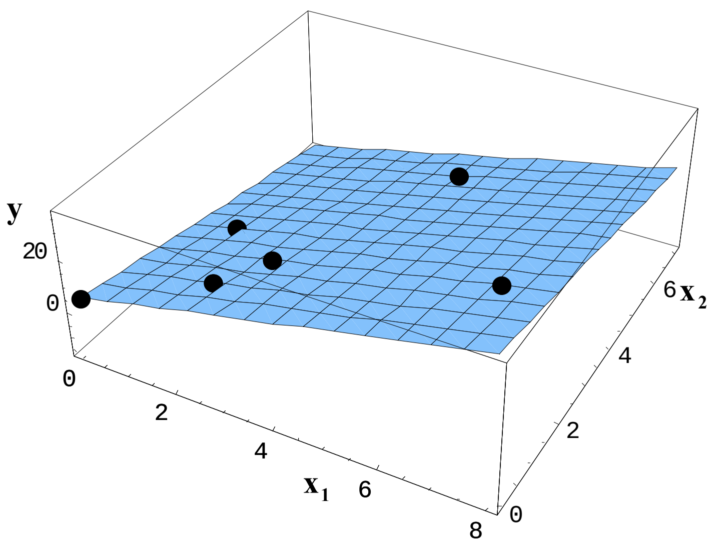
Bu denklem sisteminin çözümünden

$a_0 = 5$, $a_1 = 4$, $a_2 = -3$

elde edilen değerleri ile aşağıdaki denklem yazılır.

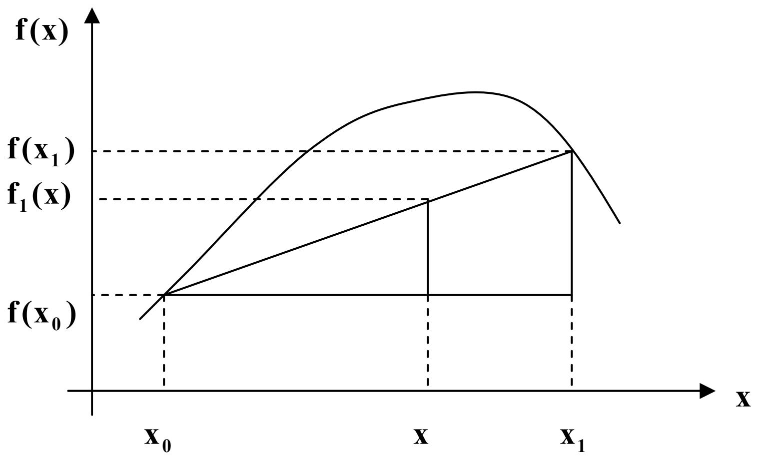
$$y = 5 + 4x_1 - 3x_2$$

Verilen tablo değerleri ile Bulunan düzlem denkleminin uyumu aşağıdaki grafik üzerinden izlenebilir.



5.2 İNTERPOLASYON

5.2.1 Lineer interpolasyon (ara değeri bulma)



$$\frac{f_1(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \quad , \qquad f_1(x)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

Örnek 5.2.1.1

$\ln 1 = 0 \qquad \ln 6 = 1{,}7917595 \qquad \ln 4 = 1{,}3862944$

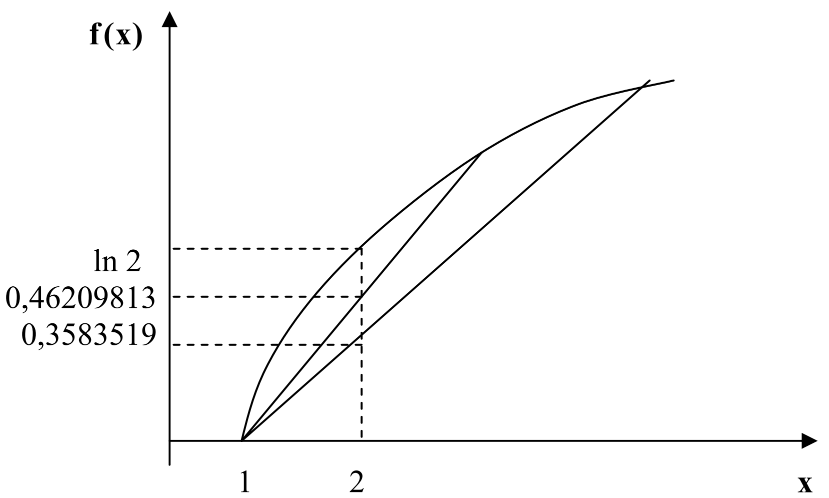
$\ln 2 = \ ? \qquad (\ \ln 2 = 0{,}69314718\ )$

1. Çözüm: $x_0 = 1 \quad , \quad x_1 = 6$

$$f_1(2)=0+\frac{1{,}7917595-0}{6-1}(2-1) \;\Rightarrow\; f_1(2)=0{,}35835190 \quad , \qquad |\varepsilon_t| = 48{,}3\ \%$$

2. Çözüm: $x_0 = 1 \quad , \quad x_1 = 4$

$$f_1(2)=0+\frac{1{,}3862944-0}{4-1}(2-1) \;\Rightarrow\; f_1(2)=0{,}46209813 \quad , \qquad |\varepsilon_t| = 33{,}3\ \%$$



5.2.2 Kuadratik interpolasyon

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \qquad (3.3.2.2.-1)$$

$$f_2(x) = b_0 + b_1 x - b_1 x_0 + b_2 x^2 + b_2 x_0 x_1 - b_2 x x_0 - b_2 x x_1 \qquad (3.3.2.2.-2)$$

$$f_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad (3.3.2.2.-3)$$

$$a_0 = b_0 - b_1 x_0 + b_2 x_0 x_1 \qquad (3.3.2.2.-4)$$

$$a_1 = b_1 - b_2 x_0 - b_2 x_1 \qquad (3.3.2.2.-5)$$

$$a_2 = b_2 \qquad (3.3.2.2.-6)$$

(3.3.2.2.-1) denkleminde x yerine x_0 yazılırsa

$$b_0 = f(x_0) \qquad (3.3.2.2.-7)$$

elde edilir.

Bu bulunan (3.3.2.2.-7) eşitliği ve x yerine x_1 değişkeni (3.3.2.2.-1) denkleminde yerine yazılırsa

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad (3.3.2.2.-8)$$

denklemi bulunur. Bu (3.3.2.2.-8) ve (3.3.2.2.-7) denklemi (3.3.2.2.-1) de yerine konur ve ayrıca x yerine x_2 yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \qquad (3.3.2.2.-9)$$

Örnek 5.2.2.1

$x_0 = 1 \quad f(x_0) = 0 \quad , \quad x_1 = 4 \quad f(x_1) = 1,3862944 \quad , \quad x_2 = 6 \quad f(x_2) = 1,7917595$

$f(2) = \ ?$

$$b_0 = 0 \qquad b_1 = \frac{1,3862944 - 0}{4 - 1} \Rightarrow b_1 = 0,46209813$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{1,7917595 - 1,3862944}{6 - 4} - 046209813}{6 - 1} \Rightarrow b_2 = -0,051873116$$

$$f_2(x) = 0 + 0{,}46209813(x-1) - 0{,}051873116(x-1)(x-4)$$

$$f_2(2) = 0{,}56584436 \qquad\qquad \varepsilon_t = 18{,}4\ \%$$

5.3 Newton interpolasyon polinomunun genel formu

n. mertebeden polinom $n+1$ adet veri noktaları gerektirir.

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \cdots + b_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$
$$b_0 = f(x_0)$$
$$b_1 = f[x_1, x_0]$$
$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

.

.

.

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0]$$

Burada

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_0]}{x_n - x_0}$$

$$f_n(x) = f(x_0) + (x-x_0) f[x_1, x_0] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_2, x_1, x_0]$$
$$+ \cdots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0]$$

Örnek 5.3.1

$x_0 = 1 \qquad x_1 = 4 \qquad x_2 = 6 \qquad x_3 = 5$

$f(x_0) = \ln 1 = 0 \qquad f(x_1) = \ln 4 = 1{,}3862944 \qquad f(x_2) = \ln 6 = 1{,}7917595$

$f(x_3) = \ln 5 = 1{,}6094379$

3. dereceden polinom $n = 3$

$$f_3(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$b_0 = f(x_0) = \ln 1 \quad \Rightarrow \quad b_0 = 0$$

$$b_1 = f[x_1, x_0] = \frac{1{,}3862944 - 0}{4 - 1} \quad \Rightarrow \quad b_1 = 0{,}46209813$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{1{,}7917595 - 1{,}3862944}{6 - 4} = 0{,}20273255$$

$$f[x_3, x_2] = \frac{1{,}6094379 - 1{,}7917595}{5 - 6} = 0{,}18232160$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] = \frac{0{,}20273255 - 0{,}46209813}{6 - 1} \quad \Rightarrow \quad b_2 = -0{,}051873116$$

$$f[x_3, x_2, x_1] = \frac{0{,}18232160 - 0{,}20273255}{5 - 4} = -0{,}020410950$$

$$b_3 = f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{-0{,}020410950 - (-0{,}051873116)}{5 - 1} \quad \Rightarrow \quad b_3 = 0{,}0078655415$$

$$f_3(x) = 0 + 0{,}46209813(x-1) - 0{,}051873116(x-1)(x-4) + 0{,}0078655415(x-1)(x-4)(x-6)$$

$$f_3(2) = 0{,}62876869 \qquad \varepsilon_t = 9{,}3\%$$

5.4 İnterpolasyon polinomlarının katsayılarını bulmak için diğer bir yöntem

$$\mathbf{f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}$$

Bu polinomdaki $\mathbf{a_0 , a_1 , a_2 , \cdots , a_n}$ $\mathbf{n+1}$ tane katsayıyı bulmak için $\mathbf{n+1}$ tane veri noktası gerekir.

Örnek olarak $\mathbf{n = 2}$ için 3 bilinmiyenli denklem elde edilir. Bu gereken veri noktaları

$$\mathbf{[x_0, f(x_0)] \quad , \quad [x_1, f(x_1)] \quad , \quad [x_2, f(x_2)]}$$

şeklindedir.Bunlar $\mathbf{f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2}$ denkleminde yerine ayrı ayrı konursa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\mathbf{f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2}$$
$$\mathbf{f(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2}$$
$$\mathbf{f(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2}$$

Bu denklem sisteminden bilinmiyen $\mathbf{a_0 , a_1 , a_2}$ katsayıları bulunur.

Örnek 5.4.1

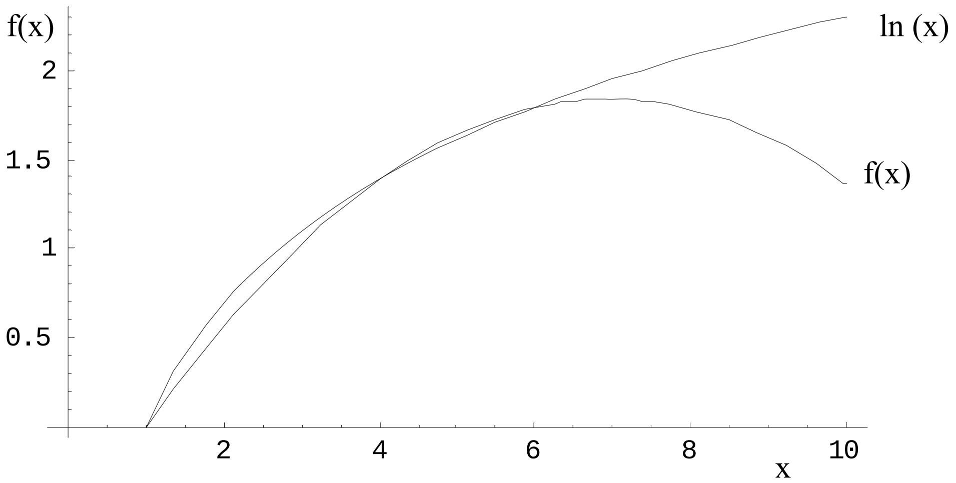
$\ln x \qquad x_0 = 1 \quad f(x_0) = 0 \ , \quad x_1 = 4 \quad f(x_1) = 1{,}38629 \ , \quad x_2 = 6 \quad f(x_2) = 1{,}79176$

$$0 = a_0 + a_1 + a_2$$
$$1{,}38629 = a_0 + 4a_1 + 16a_2$$
$$1{,}79176 = a_0 + 6a_1 + 36a_2$$

Bu denklem sisteminin çözümünden
$a_0 = -0{,}669586 \quad , \quad a_1 = 0{,}721458 \quad , \quad a_2 = -0{,}0518723$

$$f(x) = -0{,}6696 + 0{,}72146\,x - 0{,}0518723\,x^2$$

$x = 2 \qquad f(x) = 0{,}5658 \qquad\qquad (\ln 2 = 0{,}69315)$



5.5 Lagrange interpolasyon formülü

Newton interpolasyon formülünün daha kullanışli hale getirilmiş şeklidir. Burada bölünmüş farkların hesabına gerek kalmaz.

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x)\, f(x_i)$$

Burada $\quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Birinci dereceden (n = 1 için) Lagrange interpolasyon polinomu :

$$f_1(x) = L_0(x)\,f(x_0) + L_1(x)\,f(x_1)$$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{1} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} \qquad \Rightarrow \qquad L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{1} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} \qquad \Rightarrow \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

İkinci dereceden n = 2 için Lagrange interpolasyon polinomu :

$$f_2(x) = L_0(x)\,f(x_0) + L_1(x)\,f(x_1) + L_2(x)\,f(x_2)$$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} \qquad \Rightarrow \qquad L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\,\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} \qquad \Rightarrow \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\,\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 2}}^{2} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} \qquad \Rightarrow \qquad L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\,\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$f_2(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\,\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\,f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\,\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\,f(x_1) + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\,\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\,f(x_2)$$

Üçüncü dereceden n = 3 için Lagrange interpolasyon polinomu :

$$f_3(x) = L_0(x)\,f(x_0) + L_1(x)\,f(x_1) + L_2(x)\,f(x_2) + L_3(x)\,f(x_3)$$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{3} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} \qquad \Rightarrow \qquad L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\,\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\,\frac{x - x_3}{x_0 - x_3}$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{3} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} \qquad \Rightarrow \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\,\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\,\frac{x - x_3}{x_1 - x_3}$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 2}}^{3} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} \qquad \Rightarrow \qquad L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\,\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\,\frac{x - x_3}{x_2 - x_3}$$

$$L_3(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 3}}^{3} \frac{x - x_j}{x_3 - x_j} \qquad \Rightarrow \qquad L_3(x) = \frac{x - x_0}{x_3 - x_0}\,\frac{x - x_1}{x_3 - x_1}\,\frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

$$f_3(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\frac{x-x_3}{x_0-x_3}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\frac{x-x_3}{x_1-x_3}f(x_1)$$

$$+\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\frac{x-x_3}{x_2-x_3}f(x_2)+\frac{x-x_0}{x_3-x_0}\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\frac{x-x_2}{x_3-x_2}f(x_3)$$

Lagrange interpolasyon polinomunun Newton interpolasyon polinomundan çıkarılışı.

$$f_1(x)=f(x_0)+(x-x_0)\,f[x_1,x_0]$$

$$f[x_1,x_0]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}+\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}$$

$$f_1(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}f(x_0)$$

$$f_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)$$

Örnek 5.5.1

ln x $\quad x_0=1 \quad f(x_0)=0\ , \quad x_1=4 \quad f(x_1)=1{,}38629\ , \quad x_2=6 \quad f(x_2)=1{,}79176$

Birinci dereceden Lagrange polinomu için çözüm:

$$f_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)$$

$$f_1(x)=\frac{x-4}{1-4}*0+\frac{x-1}{4-1}*1{,}3862944$$

$$f_1(2)=\frac{2-4}{1-4}*0+\frac{2-1}{4-1}*1{,}3862944 \qquad \Rightarrow \qquad f_1(2)=0{,}4620981$$

İkinci dereceden Lagrange polinomu için çözüm:

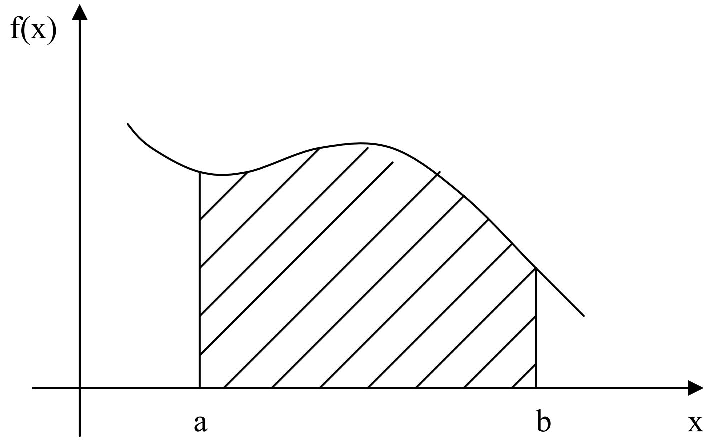
$$f_2(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2}f(x_1)+\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$

$$f_2(x)=\frac{x-4}{1-4}\frac{x-6}{1-6}*0+\frac{x-1}{4-1}\frac{x-6}{4-6}*1{,}3862944+\frac{x-1}{6-1}\frac{x-4}{6-4}*1{,}7917595$$

$$f_2(x)=\frac{2-4}{1-4}\frac{2-6}{1-6}*0+\frac{2-1}{4-1}\frac{2-6}{4-6}*1{,}3862944+\frac{2-1}{6-1}\frac{2-4}{6-4}*1{,}7917595 \quad \Rightarrow \quad f_2(x)=0{,}565844$$

6 SAYISAL İNTEGRAL

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

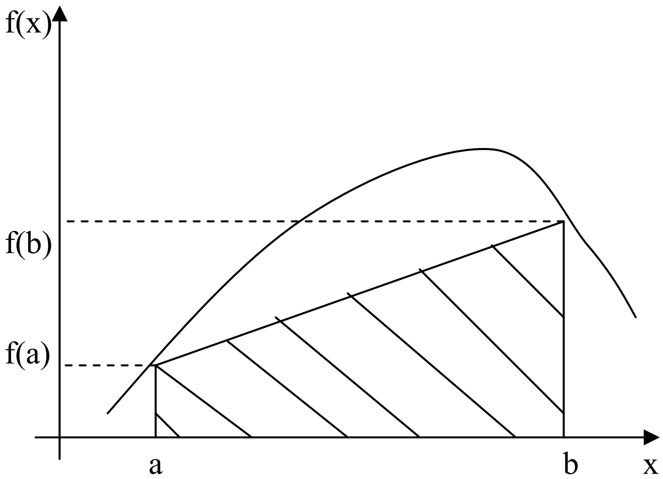


6.1 NEWTON-KOT İNTEGRAL FORMÜLÜ

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_n(x)\,dx$$

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

6.2 Trapez (yamuk) kuralı



$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_1(x)\,dx$$

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$I \cong \int_a^b [f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)]\,dx$$

$$I \cong [f(a)x - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} a\,x + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{x^2}{2}]_a^b$$

$$I \cong f(a)b - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} a\,b + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{b^2}{2} - f(a)a + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} a\,a - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{a^2}{2}$$

$$I \cong f(a)b - f(a)a + \frac{f(a)[ab + (-a^2 - b^2)/2] - f(b)[ab + (-a^2 - b^2)/2]}{b-a}$$

$$I \cong f(a)(b-a) + \frac{(b-a)^2[f(b)-f(a)]}{2(b-a)}$$

$$I \cong f(a)(b-a) + \frac{(b-a)[f(b)-f(a)]}{2}$$

$$I \cong \frac{2f(a)(b-a) + (b-a)[f(b)-f(a)]}{2}$$

$$I \cong (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

6.2.1 İntegral bölgesinin n eşit parçaya bölünerek yamuk kuralının uygulanışı:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Burada $(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $n+1$ adet noktadır.

$h = \dfrac{b-a}{n}$ Parçaların genişliğidir.

$$I \cong h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

$$I \cong \frac{h}{2}[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)]$$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}$$

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

$$\overline{f''} \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)}{n}$$

Burada $\overline{f''}$ ikinci türevin bütün bölge içinde ortalama değeridir.
Böylece yaklaşık hata aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\overline{f''}$$

Örnek 6.2.1.1

$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$I = \int_0^{0,8} f(x)\,dx$$

Bu integral analitik olarak çözülürse I=1,64053334 bulunur.

Burada $a = 0$, $b = 0{,}8$ dır.

n = 8 için $h = \frac{0{,}8-0}{8} = 0{,}1$ ve $x_0 = 0$ $x_1 = 0{,}1$ $x_2 = 0{,}2$ $x_3 = 0{,}3$ $x_4 = 0{,}4$
$x_5 = 0{,}5$ $x_6 = 0{,}6$ $x_7 = 0{,}7$ $x_8 = 0{,}8$ değerleri aşağıdaki formülde yerine konursa

$$I \cong (b-a)\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}$$

$$I \cong (0{,}8-0)\frac{f(0) + 2\,[\,f(0{,}1) + f(0{,}2) + f(0{,}3) + f(0{,}4) + f(0{,}5) + f(0{,}6) + f(0{,}7)\,] + f(0{,}8)}{2*8}$$

$f(0) = 0{,}2$ $f(0{,}1) = 1{,}289$ $f(0{,}2) = 1{,}288$ $f(0{,}3) = 1{,}607$ $f(0{,}4) = 2{,}456$

$f(0{,}5) = 3{,}325$ $f(0{,}6) = 3{,}464$ $f(0{,}7) = 2{,}363$ $f(0{,}8) = 0{,}232$

$$I \cong 0{,}8\frac{0{,}2 + 2\,[1{,}289 + 1{,}288 + 1{,}607 + 2{,}456 + 3{,}325 + 3{,}464 + 2{,}363\,] + 0{,}232}{16}$$

$I \cong 1{,}6008$
$E_t = 1{,}64053334 - 1{,}6008 \quad \Rightarrow \quad E_t = 0{,}03973334$

$$\varepsilon_t = \left|\frac{1{,}64053334 - 1{,}6008}{1{,}64053334}\right| * 100 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_t = 2{,}42\ \%$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\,\overline{f''}$$

$$\overline{f''} = \frac{\int_a^b f''(x)\,dx}{b-a}$$

$$f'(x) = 25 - 400x + 2025x^2 - 3600x^3 + 2000x^4$$

$$f''(x) = -400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3$$

$$\int_0^{0,8} f''(x)dx = \int_0^{0,8} (-400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3)\,dx$$

$$\int_0^{0,8} f''(x)dx = -400 * 0{,}8 + 4050 * (0{,}8)^2 / 2 - 10800 * (0{,}8)^3 / 3 + 8000 * (0{,}8)^4 / 4$$

$$\int_0^{0,8} f''(x)dx = -48 \qquad f'' = -60 \qquad E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\,\overline{f''}$$

$$E_a = -\frac{(0{,}8)^3}{12 * 8^2}(-60) \quad \Rightarrow \quad E_a = 0{,}04$$

$$\varepsilon_a = \left|\frac{E_a}{1{,}6008}\right| * 100 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_a = 2{,}499\ \%$$

6.3 Simpson'un 1/3 kuralı

Buradaki 1/3 , h üçe bölündüğü içindir.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Eğer $x_0 = a$ $x_2 = b$ $x_1 = \dfrac{b+a}{2}$ ve $f_2(x)$ yerine ikinci dereceden Lagrange polinomu alınırsa integral aşağıdaki şekle gelir.

$$I \cong \int_{x_0}^{x_1} [\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)]\,dx$$

Bu ıntegral işlemi sonucunda elde edilen ifadede gereken kısaltmalar yapıldıktan sonra integral formülü aşağıdaki şekli alır.

$$I \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Eğer (a , b) aralığı n eşit parçaya bölünürse

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$I \cong (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum\limits_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum\limits_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$

formülü bulunur.

Örnek 6.3.1

$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$I = \int_0^{0{,}8} f(x)\,dx$$

Bu integral analitik olarak çözülürse I=1,64053334 bulunur.

Burada $a = 0$, $b = 0{,}8$ dır.

n = 8 için $h = \dfrac{0{,}8 - 0}{8} = 0{,}1$ ve $x_0 = 0$ $x_1 = 0{,}1$ $x_2 = 0{,}2$ $x_3 = 0{,}3$ $x_4 = 0{,}4$

$x_5 = 0{,}5$ $x_6 = 0{,}6$ $x_7 = 0{,}7$ $x_8 = 0{,}8$ değerleri aşağıdaki formülde yerine konursa

$$I \cong (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$

$$I \cong (0{,}8-0)\frac{f(0) + 4\,[\,f(0{,}1) + f(0{,}3) + f(0{,}5) + f(0{,}7)] + 2[f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}6)\,] + f(0{,}8)}{3 * 8}$$

$f(0) = 0{,}2$ $f(0{,}1) = 1{,}289$ $f(0{,}2) = 1{,}288$ $f(0{,}3) = 1{,}607$ $f(0{,}4) = 2{,}456$

$f(0{,}5) = 3{,}325$ $f(0{,}6) = 3{,}464$ $f(0{,}7) = 2{,}363$ $f(0{,}8) = 0{,}232$

$$I \cong 0{,}8\frac{0{,}2 + 4\,[1{,}289 + 1{,}607 + 3{,}325 + 2{,}363\,] + 2[1{,}288 + 2{,}456 + 3{,}464] + 0{,}232}{24}$$

$$I \cong 1{,}6428$$

$$E_t = 1{,}64053334 - 1{,}6428 \quad \Rightarrow \quad E_t = -0{,}00226666$$

$$\varepsilon_t = \left|\frac{1{,}64053334 - 1{,}6428}{1{,}64053334}\right| * 100 \quad \Rightarrow \quad |\,\varepsilon_t\,| = 0{,}138\,\%$$

6.4 IMPROPER İNTEGRAL (Sınırları sonsuz olan integral)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{t^2} f(1/t)\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-A} f(x)dx + \int_{-A}^{b} f(x)dx$$

$$x = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{1}{t^2}dt \ , \quad x = -A \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{A} \ , \quad x = -\infty \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{\infty} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \int_{-1/A}^{0} f(x)dx + \int_{-A}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-A} f(x)dx + \int_{-A}^{B} f(x)dx + \int_{B}^{\infty} f(x)dx$$

$$x = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{1}{t^2}dt \ , \quad x = -A \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{A} \ , \quad x = -\infty \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{\infty} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1/A}^{0} \frac{1}{t^2} f(1/t)dt + \int_{-A}^{B} f(x)dx + \int_{0}^{1/B} \frac{1}{t^2} f(1/t)dt$$

Örnek 6.4.1

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$$

$$N(1) = ?$$

$$N(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-2} e^{-x^2/2}\, dx + \int_{-2}^{1} e^{-x^2/2}\, dx \right)$$

$$x = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{1}{t^2}dt \ , \quad x = -A \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{A} \ , \quad x = -\infty \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{\infty} = 0$$

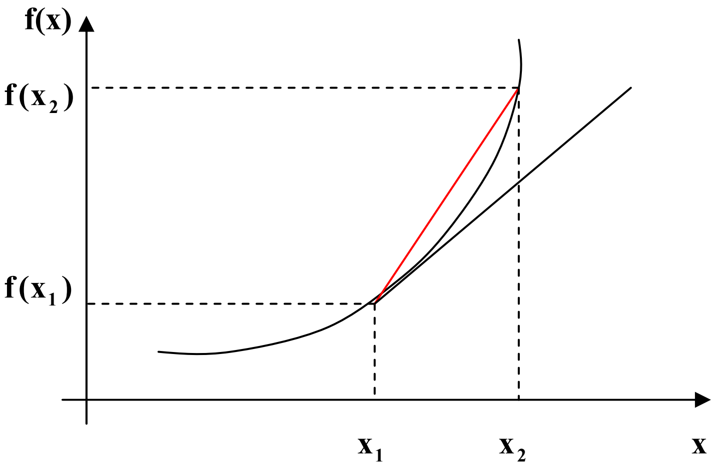
$$\int_{-\infty}^{-2} e^{-x^2/2}\, dx = \int_{-1/2}^{0} \frac{1}{t^2} e^{-1/2t^2}\, dt \cong 0{,}0556$$

$$\int_{-2}^{1} e^{-x^2/2}\, dx \cong 2{,}0523$$

$$N(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(0{,}0556 + 2{,}0523) \quad \Rightarrow \quad N(1) = 0{,}8409$$

7 SAYISAL TÜREV

Türevin tanımı:



$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \text{Lim}_{(x_2 - x_1) \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Bir fonksiyonun Taylor serisine açılımından faydalanılarak aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \cdots \qquad h = x_{i+1} - x_i$$

Buradan $f'(x_i)$ çözülebilir.

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + O\,(h^2)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O\,(h)$$

Şeklinde yazılabilir. Veya

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O\,(h)$$

bu ikinci türev formülü ile birlikte aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2} h + O\,(h^2)$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O\,(h^2)$$

7.1 İLERİ DOĞRU FARKLAR METODU İLE TÜREVLER

Birinci mertebeden türev:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \qquad f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$$

İkinci mertebeden türev:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} \qquad f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$$

Üçüncü mertebeden türev:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$$

$$f'''(x_i) = \frac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$$

Dördüncü mertebeden türev:

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$$

7.2 GERİYE DOĞRU FARKLAR METODU İLE TÜREVLER

Birinci mertebeden türev:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} \qquad f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$$

İkinci mertebeden türev:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} \qquad f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2}$$

Üçüncü mertebeden türev:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3}$$

$$f'''(x_i) = \frac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3}$$

Dördüncü mertebeden türev:

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4}$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5})}{h^4}$$

7.3 MERKEZİ FARKLAR METODU İLE TÜREVLER

Birinci mertebeden türev:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} \qquad f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}$$

İkinci mertebeden türev:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}$$

Üçüncü mertebeden türev:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3}$$

$$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{8h^3}$$

Dördüncü mertebeden türev:

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4}$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) - 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{6h^4}$$

Örnek 7.3.1

$f(x) = \ln x$ $\qquad$ $f'(5) = ?$ $\qquad$ $f''(5) = ?$

Analitik çözüm:

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad$ $f'(5) = 0{,}2$ $\qquad$ $f''(5) = -0{,}04$

Sayısal çözüm:

$$f'(5) = \frac{\ln(5 + 0{,}01) - \ln(5)}{5{,}01 - 5} = \frac{1{,}6114435915 - 1{,}609437912}{0{,}01} \quad \Rightarrow \quad f'(5) = 0{,}199800266$$

$$f''(5) = \frac{\ln(5{,}02) - 2\ln(5{,}01) + \ln(5)}{(0{,}01)^2} = \frac{1{,}613429934 - 2 * 1{,}611435915 + 1{,}609437912}{0{,}0001}$$

$$f''(5) = -0{,}0398405$$

8 ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$$y = -0{,}5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8{,}5x + 1$$

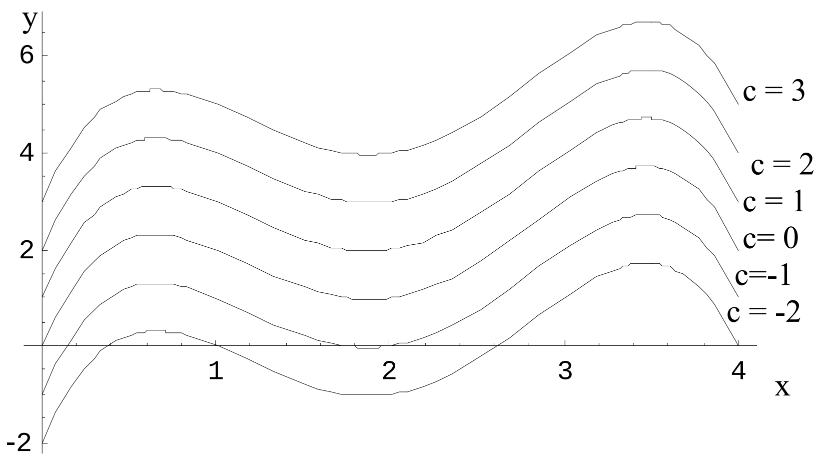
Şeklinde verilen denklem aşağıdaki diferansiyel denklemin gösterdiği eğrilerden sadece birisidir.

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$$

$$y = \int [-2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5]\, dx$$

integralinin sonucu aşağıda gibi bir eğri ailesini gösterir.

$$y = -0{,}5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8{,}5x + C$$



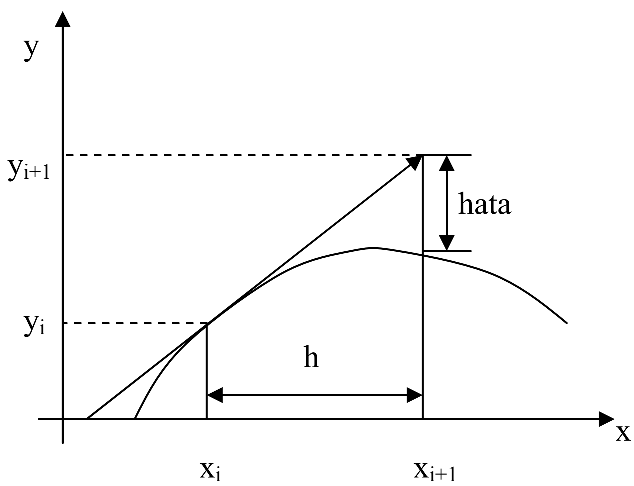
Bu durumda tek bir eğrinin belirli olması için C integral sabitinin hesaplanabileceği koşulların verilmesi gerekir.
Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde geliştirilen yöntemlerden bazıları aşağıda verilmiştir.

8.1 EULER METODU

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$y_{i+1} = y + f(x_i, y_i)h$$

yeni değer = eski değer + eğim * adım



Örnek 8.1.1

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \qquad y_{(4)}=0{,}75 \qquad y_{(7)}=?$$

Analitik çözüm:

$$\int\frac{dy}{y}=-\int_C^x\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \ln y=-(\ln x-\ln c) \quad\Rightarrow\quad \ln y=\ln\frac{c}{x} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{c}{x}$$

$y_{(4)}=0{,}75$ koşulunu kullanırsak $0{,}75=\frac{c}{4} \quad\Rightarrow\quad c=3$

ve böylece $y=\frac{3}{x}$ bulunur. Buradan $y_{(7)}=\frac{3}{7}=0{,}4285714$

Sayısal çözüm:

$$y_{i+1}=y+f(x_i,y_i)h$$

$$f(x_i,y_i)=-\frac{y_i}{x_i}$$

ve h = 1 alınırsa

$y_{(5)}=y_{(4)}+(-y_{(4)}/4)*1=0{,}75-(0{,}75/4) \quad\Rightarrow\quad y_{(5)}=0{,}5625$

$y_{(6)}=y_{(5)}+(-y_{(5)}/5)*1=0{,}5625-(0{,}5625/5) \quad\Rightarrow\quad y_{(6)}=0{,}45$

$y_{(7)}=y_{(6)}+(-y_{(6)}/64)*1=0{,}45-(0{,}45/6) \quad\Rightarrow\quad y_{(7)}=0{,}375$

$$\varepsilon_t=\frac{0{,}42857-0{,}375}{0{,}42857}100\%=12{,}5\%$$

8.1.1 İyileştirilmiş Euler metodu

$$y_{i+1/2}=y_i+f(x_i,y_i)\frac{h}{2}$$

$$y_{i+1}=y_i+f(x_{i+1/2},y_{i+1/2})h$$

Örnek 8.1.1.1

Yukarıdaki örnek iyileştirilmiş Euler yöntemi ile çözülürse

Yine aynı şekilde h = 1 alınırsa

$y_{(4,5)}=y_{(4)}+(-y_{(4)}/4)*0{,}5=0{,}75-(0{,}75/4)*0{,}5 \quad\Rightarrow\quad y_{(4,5)}=0{,}65625$

$y_{(5)}=y_{(4)}+(-y_{(4,5)}/4{,}5)*1=0{,}75-(0{,}65625/4{,}5)*1 \quad\Rightarrow\quad y_{(5)}=0{,}6041666667$

$y_{(5,5)}=y_{(5)}+(-y_{(5)}/5)*0{,}5=0{,}6041667-(0{,}6041667/5)*0{,}5 \quad\Rightarrow\quad y_{(5,5)}=0{,}54375$

$y_{(6)}=y_{(5)}+(-y_{(5,5)}/5{,}5)*1=0{,}6041667-(0{,}54375/5{,}5)*1 \quad\Rightarrow\quad y_{(6)}=0{,}505303$

$y_{(6,5)} = y_{(6)} + (- y_{(6)} / 6) *0,5 = 0,505303 -(0,505303/6) * 0,5 \quad \Rightarrow \quad y_{(6,5)} = 0,4631944$

$y_{(7)} = y_{(6)} + (- y_{(6,5)} / 6,5) *1 = 0,505303 -(0,4631944/6,5) *1 \quad \Rightarrow \quad y_{(7)} = 0,434042$

$$\varepsilon_t = \left| \frac{0,4285714 - 0,434142}{0,4285714} \right| 100\ \% \qquad \varepsilon_t = 1,28\ \%$$

8.2 HEUN METODU

Bu metotta Euler metodundaki i inci noktadaki türev yerine i ve (i+1) inci noktadaki türevlerin aritmetik ortalaması alınır.

$$\bar{y}' = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^0_{i+1})}{2}$$

$$y^0_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^0_{i+1})}{2} h$$

Örnek 8.2.1

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \qquad y_{(4)} = 0,75 \qquad y_{(7)} = ? \qquad (\text{ analitik çözümde } y_{(7)} = \frac{3}{7} = 0,4285714\ )$$

$h = 1$ alınırsa

$$y^0_5 = y_4 + (-\frac{y_4}{4}) * 1 = 0,5625$$

$$y_5 = y_4 + \frac{(-\frac{y_4}{4}) + (-\frac{y^0_5}{5})}{2} * h \quad \Rightarrow \quad y_5 = 0,6$$

$$y^0_6 = y_5 + (-\frac{y_5}{5}) * 1 = 0,48$$

$$y_6 = y_5 + \frac{(-\frac{y_5}{5}) + (-\frac{y^0_6}{6})}{2} * h \quad \Rightarrow \quad y_6 = 0,5$$

$$y^0_7 = y_6 + (-\frac{y_6}{6}) * 1 = 0,4166667$$

$$y_7 = y_6 + \frac{(-\frac{y_6}{6}) + (-\frac{y^0_7}{7})}{2} * h \quad \Rightarrow \quad y_7 = 0,4285714286$$

$$\varepsilon_t = 0\ \%$$

8.3 RUNGE-KUTTA METODU

Runge-Kutta metodu, Taylor serileri ile yaklaşımdaki hassasiyeti, yüksek mertebeden türevlere ihtiyaç duymadan yakalayabildiğinden, yüksek hassasiyetin arandığı durumlarda tercih edilir. Runge-Kutta metodu aşağıdaki formda yazılabilir.

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

Burada

$\phi(x_i, y_i, h)$ fonksiyonuna artım fonksiyonu denir.Bu söz konusu aralıktaki eğimi gösterir.

Artım fonksiyonu genel formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n$$

Burada a lar sabit k lar ise aşağıdaki gibidir.

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h)$$

.

.

.

$$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$$

Burada p ve q lar sabitlerdir.

8.3.1. İkinci dereceden Runge-Kutta metodu

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$$

y_{i+1} için y_i ve $f(x_i, y_i)$ terimleri ile ikinci mertebeden Taylor serisi yazılırsa

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2$$

Burada $f'(x_i, y_i)$ zincir kuralı ile belirlenmelidir.

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Bu ikinci türev Taylor formülünde yerine yazılırsa

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\frac{h^2}{2!} \qquad (2)$$

İki değişkenli fonksiyonlarda Taylor serisi

$$g(x+r, y+s) = g(x,y) + r\frac{\partial g}{\partial x} + s\frac{\partial g}{\partial y} + \cdots$$

Bu formül yukarıdaki iki değişkenli fonksiyon içeren k_2 eşitliği için uygulanırsa

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) = f(x_i, y_i) + p_1h\frac{\partial f}{\partial x} + q_{11}k_1h\frac{\partial f}{\partial y} + O(h^2)$$

Bu k_2 eşitliği $k_1 = f(x_i, y_i)$ eşitliği ile birlikte ilk y_{i+1} de yerine yazılırsa

$$y_{i+1} = y_i + a_1 h f(x_i, y_i) + a_2 h f(x_i, y_i) + a_2 p_1 h^2 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} h^2 f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y} + O(h^3)$$

ve terimler bir araya toplanırsa

$$y_{i+1} = y_i + [a_1 f(x_i, y_i) + a_2 f(x_i, y_i)]h + [a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y}]h^2 + O(h^3)$$

Bu denklem 2 denklemiyle $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ olduğu göz önüne alınarak karşılaştırılırsa

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 q_{11} = \frac{1}{2}$$

bulunur. Burada 3 denklem 4 bilinmeyen olduğundan çok sayıda çözüm elde edilebilir.

Tek düzeltme katsayılı Heun yöntemi ($a_2 = 1/2$)

$$a_2 = 1/2 \;,\quad a_1 = 1/2 \;,\quad p_1 = q_{11} = 1$$

Bu parametreler yerine konursa

$$y_{i+1} = y_i + (\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

Orta nokta metodu ($a_2 = 1$)

$$a_2 = 1,\quad a_1 = 0,\quad p_1 = q_{11} = \frac{1}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$

Ralston yöntemi ($a_2 = 2/3$)

$$a_2 = \frac{2}{3},\quad a_1 = \frac{1}{3},\quad p_1 = q_{11} = \frac{3}{4}$$

$$y_{i+1} = y_i + (\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h)$$

8.3.2. Üçüncü dereceden Runge-Kutta metodu

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1 h + k_2 h)$$

8.3.3. Dördüncü dereceden Runge-Kutta metodu

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$
$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h)$$
$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

Örnek 8.3.3.1

$$\frac{dy}{dx} = 4e^{0.8x} - 0.5y \quad , \quad y_0 = 2 \ , \quad x = 0 \ \text{dan} \ \ x = 0.5 \, , \quad h = 0.25$$
$$f(x, y) = 4e^{0.8x} - 0.5y$$
$$k_1 = f(0.25, y_i) = 4e^{0.8*0.25} - 0.5y_i$$
$$y_{0.25} = y_0 + f(0,2)0.25 = 2 + (4e^{0.8*0} - 0.5*2)0.25 = 2.75$$
$$k_1 = f(0.25, 2.75) = 4e^{0.8*0.25} - 0.5*2.75 = 3.510611$$
$$k_2 = f(0.25 + \frac{0.25}{2}, 2.75 + \frac{1}{2}3.510611*0.25)$$
$$k_2 = f(0.375, 3.188826) = 4e^{0.8*0.375} - 0.5*3.188826 = 3.80502$$
$$k_3 = f(0.25 + \frac{0.25}{2}, 2.75 + \frac{1}{2}3.80502*0.25)$$
$$k_3 = f(0.375, 3.22563) = 4e^{0.8*0.375} - 0.5*3.22563 = 3.78662$$
$$k_4 = f(0.25 + 0.25, 2.75 + 3.78662*0.25)$$
$$k_4 = f(0.5, 3.69665) = 4e^{0.8*0.5} - 0.5*3.69665 = 4.11897$$
$$y_{0.25} = 2 + \frac{1}{6}(3.510611 + 2*3.80502 + 2*3.78662 + 4.11897)0.25 = 2.95054$$
$$y_{0.5} = y_{0.25} + f(0.25, 2.95054)0.25 = 2.95054 + (4e^{0.8*0.25} - 0.5*2.95054)0.25 = 3.8031$$
$$k_1 = f(0.5, 3.8031) = 4e^{0.8*0.5} - 0.5*3.8031 = 4.06575$$
$$k_2 = f(0.5 + \frac{0.25}{2}, 3.8031 + \frac{1}{2}4.06575*0.25)$$
$$k_2 = f(0.625, 4.31132) = 4e^{0.8*0.625} - 0.5*4.31132 = 4.43922$$
$$k_3 = f(0.5 + \frac{1}{2}0.25, 3.8031 + \frac{1}{2}4.43922*0.25)$$
$$k_3 = f(0.625, 4.358) = 4e^{0.8*0.625} - 0.5*4.358 = 4.4159$$
$$k_4 = f(0.5 + 0.25, 3.8031 + 4.4159*0.25)$$
$$k_4 = f(0.75, 4.9071) = 4e^{0.8*0.75} - 0.5*4.9071 = 4.83492$$
$$y_{0.5} = 2.95054 + \frac{1}{6}(4.06575 + 2*4.43922 + 2*4.4159 + 4.83492)0.25 = 4.0593$$

8.4 DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİ METODU

n inci mertebeden bir diferansiyel denklem n tane birinci mertebeden diferansiyel denklemden oluşan bir sisteme dönüştürülebilir.

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$
$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

Bu sistemin çözümü için x in bir noktasındaki $y_1, y_2, \cdots, y_n$ değerlerinin (koşullarının) verilmesi gerekir.

Örnek 8.4.1

$a = -\lambda s \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} + \lambda s = 0 \qquad t = 0$ da $\quad s = s_0 \qquad v = v_0$

Analitik çözüm :

$$s = A \cos\sqrt{\lambda}\, t + B \sin\sqrt{\lambda}\, t$$
$$v = -A\sqrt{\lambda} \sin\sqrt{\lambda}\, t + B\sqrt{\lambda} \cos\sqrt{\lambda}\, t$$
$$A = s_0 \qquad B = \frac{v_0}{\sqrt{\lambda}}$$
$$s = s_0 \cos\sqrt{\lambda}\, t + \frac{v_0}{\sqrt{\lambda}} \sin\sqrt{\lambda}\, t$$

Örnek 8.4.2

$\mathbf{\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\pi^2}{36} s = 0} \qquad t = 0$ da $\quad \mathbf{s_0 = 8} \qquad \mathbf{v_0 = 12}$

$t = 1$ de $\quad \mathbf{s_1 = ?} \qquad \mathbf{v_1 = ?}$

Analitik çözüm : $\quad \mathbf{s = 8\cos\frac{\pi}{6} t + \frac{72}{\pi} \sin\frac{\pi}{6} t \quad \Rightarrow \quad s_1 = 18{,}38735913}$

$$\mathbf{v = -\frac{8\pi}{6} \sin\frac{\pi}{6} t + 12\cos\frac{\pi}{6} t \quad \Rightarrow \quad v_1 = 8{,}297909743}$$

Euler yöntemi ile nümerik çözüm:

Bu yöntemde $\mathbf{\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\pi^2}{36} s = 0}$ ikinci mertebeden diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi iki tane diferansiyel denklemden oluşan bir diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür.

$$\frac{ds}{dt} = v \quad , \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2}{36} s$$

$$s_{i+1} = s_i + (\frac{ds}{dt})_i \; h \quad , \qquad v_{i+1} = v_i + (\frac{dv}{dt})_i \; h$$

$$s_{i+1} = s_i + v_i \; h \quad , \qquad v_{i+1} = v_i - \frac{\pi^2}{36} s_i \; h$$

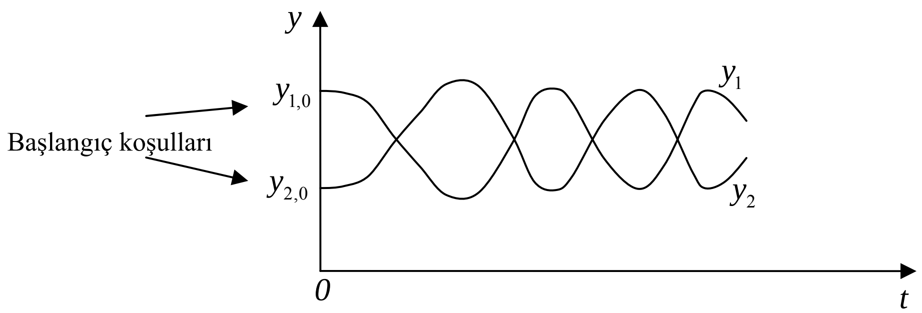
h = 0 ,1 alınırsa aşağıdaki tablo değerleri bulunur.

t	s_i	v_i	s_{i+1}	v_{i+1}
0,1	8	12	9,2	11,78067546
0,2	9,2	11,78067546	10,37806755	11,52845223
0,3	10,37806755	11,52845223	11,53091277	11,24393162
0,4	11,53091277	11,24393162	12,65530593	10,9278051
0,5	12,65530593	10,9278051	13,74808644	10,5808527
0,6	13,74808644	10,5808527	14,80617171	10,20394111
0,7	14,80617171	10,20394111	15,82656582	9,798021503
0,8	15,82656582	9,798021503	16,80636797	9,364127215
0,9	16,80636797	9,364127215	17,74278069	8,903371094
1	17,74278069	8,903371094	18,6331178	8,416942688

8.5 SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Dif. denk. $\dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2)$, $\dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2)$

Başlangıç koşulları: $t = 0$ da $y_1 = y_{1,0}$, $y_2 = y_{2,0}$

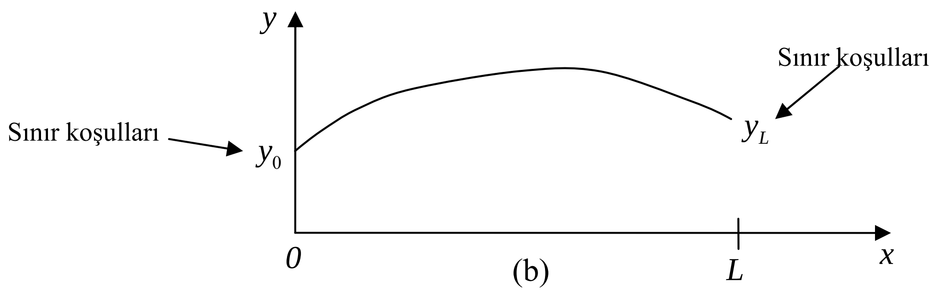


(a)

Dif. denk : $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x, y)$

Sınır koşulları: $x = 0$ da $y = y_0$

$x = L$ de $y = y_L$



(b)

8.5.1 Atış Yöntemi

Bu yöntemde sınır değer problemi başlangıç değer problemine dönüştürülür. Bu yöntem örnek üzerinde gösterilecektir.

Örnek 8.5.1.1

Uzunluğu boyunca izole edilmemiş ve sürekli rejimdeki ince ve uzun bir çubuktaki sıcaklık dağılımı aşağıdaki denklemle verilir.

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0$$

Burada h' ısı transferi katsayısıdır(cm^{-2}) . Bu çevreye giden ısı oranını karakterize eder. T_a etraftaki havanın sıcaklığı (^0C)

$T(0) = T_1$

$T(L) = T_2$

Eğer, çubuğun boyu $L = 10m$, $h' = 0.01$, $T_a = 20$, $T(0) = 40$, $T(10) = 200$

Analitik çözüm:

$T(x) = 73.4523e^{0.1x} - 53.4523e^{-0.1x} + 20$

Sayısal Çözüm:

$$\frac{dT}{dx} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = h'(T - T_a)$$

Sayısal çözüme başlayabilmek için $z(0)$ ’ın bilinmesi gerekir.

Atış metodu için $z(0) = 10$ diyelim.

$T_{i+1} = T_i + z_i h$

$z_{i+1} = z_i + h'(T_i - T_a)h$

$h = 2m$ alalım

$T_{i+1} = T_i + 2z_i$

$z_{i+1} = z_i + 0.02(T_i - 20)$

$T_2 = 40 + 2*10 = 60$

$z_2 = 10 + 0.02(40 - 20) = 10.4$

$T_4 = 60 + 2*10.4 = 80.8$

$z_4 = 10.4 + 0.02(60 - 20) = 11.2$

$T_6 = 80.8 + 2*11.2 = 103.2$

$z_6 = 11.2 + 0.02(80.8 - 20) = 12.416$

$T_8 = 103.2 + 2*12.416 = 128.032$

$z_8 = 12.416 + 0.02(103.2 - 20) = 14.08$

$T_{10} = 128.032 + 2*14.08 = 156.192$

$z(0)=14$ alalım

$T_2 = 40+2*14=68$

$z_2 = 14+0.02(40-20)=14.4$

$T_4 = 68+2*14.4=96.8$

$z_4 = 14.4+0.02(68-20)=15.36$

$T_6 = 96.8+2*15.36=127.52$

$z_6 = 15.36+0.02(96.8-20)=16.896$

$T_8 = 127.52+2*16.896=161.312$

$z_8 = 16.896+0.02(127.52-20)=19.0464$

$T_{10} = 161.312+2*19.0464=199.4048$

$z_{10} = 19.0464+0.02(161.312-20)=21.87264$

8.5.2 Sonlu Farklar Yöntemi

Bu yöntemde Türevler yerine sonlu fark ifadeleri konur. Bu yöntem aşağıdaki örnek üzerinde açıklanabilir.

8.5.2.1Örnek

Örnek 8.4.1.1 deki ince uzun çubuktaki ısı yayılması problemi ele alınırsa

$$\frac{d^2T}{dx^2}+h'(T_a-T)=0$$

Burada ikinci türev ifadesi yerine

$$\frac{d^2T}{dx^2}=\frac{T_{i+1}-2T_i+T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

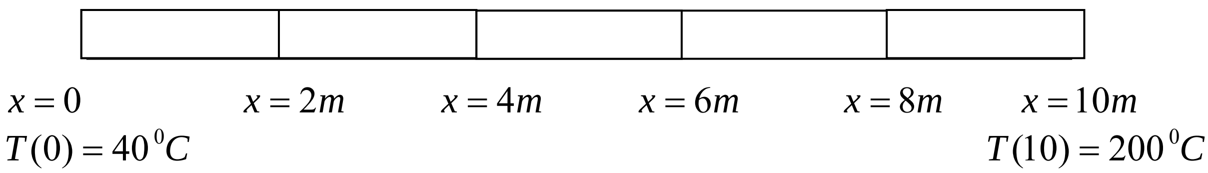
sonlu farklar ifadesi konursa

$$\frac{T_{i+1}-2T_i+T_{i-1}}{\Delta x^2}+h'(T_a-T)=0$$

Gerekli işlemler yapılırsa

$$-T_{i-1}+(2+h'\Delta x^2)T_i-T_{i+1}=h'\Delta x^2T_a$$

eşitliği elde edilir.



$$-T_0 + (2 + h'\Delta x^2)T_1 - T_2 = h'\Delta x^2 T_a$$
$$-T_1 + (2 + h'\Delta x^2)T_2 - T_3 = h'\Delta x^2 T_a$$
$$-T_2 + (2 + h'\Delta x^2)T_3 - T_4 = h'\Delta x^2 T_a$$
$$-T_3 + (2 + h'\Delta x^2)T_4 - T_5 = h'\Delta x^2 T_a$$
$$h'\Delta x^2 = 0.01 * 2^2 = 0.04$$
$$2.04T_1 - T_2 = 0.04 * 20 + 40 = 40,8$$
$$-T_1 + 2.04T_2 - T_3 = 0.8$$
$$-T_2 + 2.04T_3 - T_4 = 0.8$$
$$-T_3 + 2.04T_4 = 200.8$$

Bu denklemleri aşağıdaki gibi düzenliyebiliriz.

$$\begin{bmatrix} 2.04 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2.04 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2.04 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2.04 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \\ 200.8 \end{Bmatrix}$$

Bu denklem sisteminin çözümünden

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 65.9698 \\ 93.7785 \\ 124.5382 \\ 159.4795 \end{Bmatrix}$$

elde edilir.

9 KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER

Verilen bir u fonksiyonunun keyfi bir (x,y) noktasında x ve y ye göre kısmi türevleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta y}$$

Eğer bir denklem iki veya daha fazla bağımsız değişkene göre kısmi türevleri içeriyorsa, bu denkleme kısmi türevli denklem denir. Aşağıdaki denklemler kısmi türevli denklemlerdir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 5y$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3 + 6\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu\frac{\partial u}{\partial y} = x$$

Kısmi türevli denklemin derecesi denklemdeki en yüksek mertebeden türeve eşittir. Yukarıdaki birinci ve sonuncu denklem ikinci dereceden diğer ikisi ise üçüncü derecedendir.
Kısmi türevli denklem bilinmiyen fonksiyon u ve bunun türevlerine göre lineer ise bu denkleme kısmi türevli lineer denklem denir.
Buna göre yukarıdaki ilk iki denklem lineer son iki denklem ise lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemdir.

Mühendislikte ikinci dereceden kısmi türevli lineer diferansiyel denklemlerin geniş bir uygulama alanı vardır.
İki bağımsız değişkene göre bu denklemlerin genel formu aşağıdaki gibi yazılabilir.

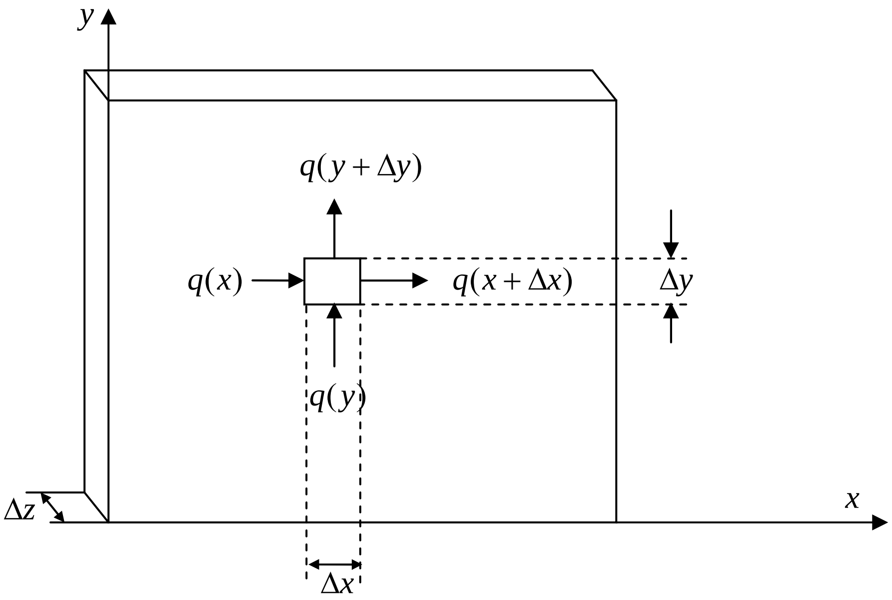
$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0$$

Burada A,B,C x ve y nin fonksiyonlarıdır. D ise x, y, u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}$ nin fonksiyonudur.

Bu denklemler A,B,C nin değerlerine bağlı olarak aşağıdaki gibi sınıflandırılır.

$B^2 - 4AC$	Kategori	Örnek
< 0	Eliptik	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ Laplace denklemi (iki boyutlu kararlı durum)
$= 0$	Parabolik	$\frac{\partial T}{\partial t} = k'\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ Isı iletimi denklemi(tek boyutta zaman değişkenli)
> 0	Hiperbolik	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ Dalga denklemi(tek boyutta zaman değişkenli)

9.2. Sonlu Farklar : Eliptik denklemler
9.2.1. Laplace denklemi



Kalınlığı Δz olan ince bir plaka ve içinde ısı dengesinin gösterildiği bir eleman

Kenarları haricinde izole edilen bir plakada ısı transferi x ve y doğrultularında olabilir. Kararlı rejimde bir elemanda Δt zamanında olabilecek ısı akışı aşağıdaki denklemle ifade edilebilir.

$$q(x)\Delta y\Delta z\Delta t + q(y)\Delta x\Delta z\Delta t = q(x+\Delta x)\Delta y\Delta z\Delta t + q(y+\Delta y)\Delta x\Delta z\Delta t$$

Burada $q(x)$ ve $q(y)$, x ve y doğrultusundaki ısı akısını $\left[cal/(cm^2.s)\right]$ göstermektedir.
Eşitlik $\Delta z\Delta t$ ye bölünüp terimler bir tarafta toplanırsa

$$[q(x)-q(x+\Delta x)]\Delta y + [q(y)-q(y+\Delta y)]\Delta x = 0$$

Bu denklemin birinci terimi $\dfrac{\Delta x}{\Delta x}$, ikinci terimi $\dfrac{\Delta y}{\Delta y}$ ile çarpılırsa

$$\frac{[q(x)-q(x+\Delta x)]}{\Delta x}\Delta x\Delta y + \frac{[q(y)-q(y+\Delta y)]}{\Delta y}\Delta x\Delta y = 0$$

Denklemi elde edilir. Bu denklem $\Delta x\Delta y$ ile bölünüp limiti alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$-\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

Bu ısı enerjisinin korunumu denklemidir. Plakanın kenarları boyunca genellikle ısı akısı yerine sıcaklık koşulları belli olduğundan bu denklemin sıcaklık cinsinden yazılması gerekir. Isı akısı sıcaklıklara Fourier' in ısı iletimi yasası ile bağlanabilir.

$$q_i = -k\rho C\frac{\partial T}{\partial i}$$

Buırada q_i = i doğrultusundaki ısı akışıdır.[cal/(cm^2 .s)] ,

k = Isı yayınım katsayısı (cm^2/s) ,
ρ = Malzemenin yoğunluğu (g/cm^3)
C = Malzemenin ısı kapasitesi (özgül ısısı)[cal/(g . ^{0}C)]
T = Sıcaklık (^{0}C)

Fourier'in ısı iletimi bağıntısı ısı enerjisinin korunumu denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki Laplace denklemi elde edilir.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

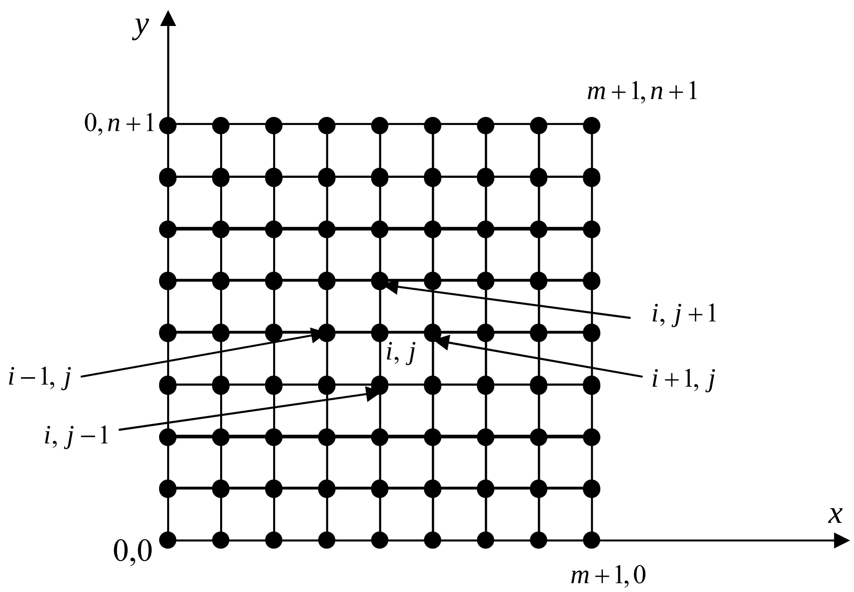
Eğer Plaka içinde ısı kaynağı veya kuyusu varsa sıcaklıklar arasındaki bağıntı

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Bu denklem Poisson denklemi olarak bilinir.

9.2.2. Çözüm tekniği

Sayısal çözümde plaka ayrık noktaların köşelere yerleştiği bir ızgara şeklinde düşünülür ve kısmi türevli denklem yerine fark denklemleri yazılıp her bir noktaya uygulanarak lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümünden ayrık noktalardaki sıcaklıklar bulunur.



Merkezi farklar uygulanırsa Laplace denklemi aşağıdaki gibi fark denklemine dönüştürülür.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

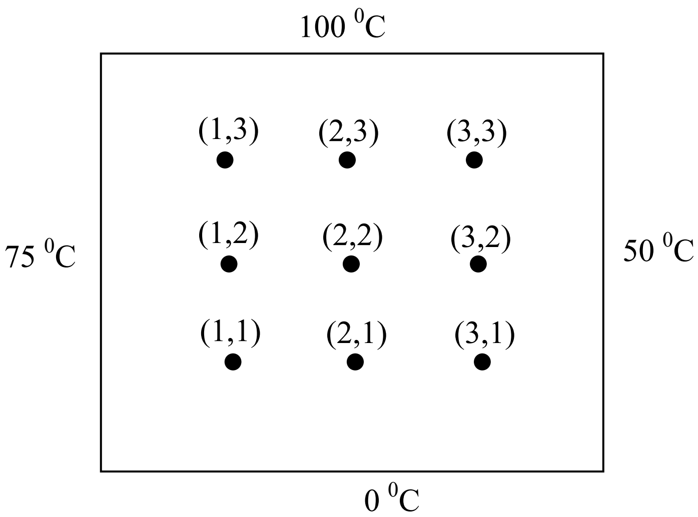
$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

Eğer ızgara birimleri kare şeklinde olursa $\Delta x = \Delta y$ olacağından sonlu farklar denklemi

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

şeklinde yazılabilir.Bu denklem Laplace fark denklemi olarak bilinir. Çözüme ulaşmak için plakanın bütün iç noktalarında bu denklemi uygulamak gerekir.

Örnek 9.2.2.1:



$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$ Sonlu farklar denklemi (1,1) noduna uygulanırsa

$T_{2,1} + T_{0,1} + T_{1,2} + T_{1,0} - 4T_{1,1} = 0$ elde edilir . ve $T_{0,1} = 75\,^0C$, $T_{1,0} = 0\,^0C$ yerine yazılırsa

$T_{2,1} + T_{1,2} - 4T_{1,1} = -75 \quad \Rightarrow \quad \boxed{4T_{1,1} - T_{1,2} - T_{2,1} = 75}$ denklemi bulunur.

Sonlu farklar denklemi (2,1) noduna uygulanırsa

$T_{3,1} + T_{1,1} + T_{2,2} + T_{2,0} - 4T_{2,1} = 0$ elde edilir. $T_{2,0} = 0$ yerine yazılırsa $\boxed{-T_{1,1} + 4T_{2,1} - T_{2,2} - T_{3,1} = 0}$ denklemi bulunur.

Sonlu farklar denklemi (3,1) noduna uygulanırsa $T_{4,1} + T_{2,1} + T_{3,2} + T_{3,0} - 4T_{3,1} = 0$ elde edilir.

$T_{4,1} = 50\,^0C$, $T_{3,0} = 0$ yerine yazılırsa $\boxed{-T_{2,1} + 4T_{3,1} - T_{3,2} = 50}$ elde edilir.

Sonlu farklar denklemi (1,2) noduna uygulanırsa $T_{2,2} + T_{0,2} + T_{1,3} + T_{1,1} - 4T_{1,2} = 0$ elde edilir.

$T_{0,2} = 75\,^0C$ yerine yazılırsa $\boxed{-T_{1,1} + 4T_{1,2} - T_{1,3} - T_{2,2} = 75}$ elde edilir.

Sonlu farklar denklemi (2,2) noduna uygulanırsa $\boxed{T_{1,2}+T_{2,1}-4T_{2,2}+T_{2,3}+T_{3,2}=0}$ elde edilir.

Sonlu farklar denklemi (3,2) noduna uygulanırsa $T_{4,2}+T_{2,2}+T_{3,3}+T_{3,1}-4T_{3,2}=0$

$T_{4,2}=50\,^0C$ yerine yazılırsa $\boxed{-T_{2,2}-T_{3,1}+4T_{3,2}-T_{3,3}=50}$ elde edilir.

Sonlu farklar denklemi (1,3) noduna uygulanırsa $T_{2,3}+T_{0,3}+T_{1,4}+T_{1,2}-4T_{1,3}=0$

$T_{0,3}=75\,^0C$ ve $T_{1,4}=100\,^0C$ yerine yazılırsa $\boxed{-T_{1,2}+4T_{1,3}-T_{2,3}=175}$ elde edilir.

Sonlu farklar denklemi (2,3) noduna uygulanırsa $T_{3,3}+T_{1,3}+T_{2,4}+T_{2,2}-4T_{2,3}=0$

$T_{2,4}=100\,^0C$ yerine yazılırsa $\boxed{-T_{2,2}-T_{1,3}+4T_{2,3}-T_{3,3}=100}$ elde edilir.

Son olaral sonlu farklar denklemi (3,3) noduna uygulanırsa $T_{4,3}+T_{2,3}+T_{3,4}+T_{3,2}-4T_{3,3}=0$ elde edilir. $T_{4,3}=50\,^0C$ ve $T_{3,4}=100\,^0C$ yerine yazılırsa $\boxed{-T_{3,2}-T_{2,3}+4T_{3,3}=150}$ elde edilir.

Bu denklemler toplu olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$4T_{1,1}-T_{2,1}-T_{1,2}=75$$
$$-T_{1,1}+4T_{2,1}-T_{3,1}-T_{2,2}=0$$
$$-T_{2,1}+4T_{3,1}-T_{3,2}=50$$
$$-T_{1,1}+4T_{1,2}-T_{2,2}-T_{1,3}=75$$
$$T_{2,1}+T_{1,2}-4T_{2,2}+T_{3,2}+T_{2,3}=0$$
$$-T_{3,1}-T_{2,2}+4T_{3,2}-T_{3,3}=50$$
$$-T_{1,2}+4T_{1,3}-T_{2,3}=175$$
$$-T_{2,2}-T_{1,3}+4T_{2,3}-T_{3,3}=100$$
$$-T_{3,2}-T_{2,3}+4T_{3,3}=150$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{3,1} \\ T_{1,2} \\ T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{1,3} \\ T_{2,3} \\ T_{3,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 75 \\ 0 \\ 50 \\ 75 \\ 0 \\ 50 \\ 175 \\ 100 \\ 150 \end{Bmatrix}$$

Mathematica programı ile bu denklem sistemi aşağıdaki gibi kolaylıkla çözülebilir.

```
A={{4,-1,0,-1,0,0,0,0,0},{-1,4,-1,0,-1,0,0,0,0},{0,-1,4,0,0,-
1,0,0,0},{-1,0,0,4,-1,0,-1,0,0},{0,1,0,1,-4,1,0,1,0},{0,0,-1,0,-
1,4,0,0,-1},{0,0,0,-1,0,0,4,-1,0},{0,0,0,0,-1,0,-1,4,-
1},{0,0,0,0,0,-1,0,-1,4}};
b={75,0,50,75,0,50,175,100,150};
x=LinearSolve[A,b];
```

```
Print["T=",MatrixForm[x]];
Print["T=",MatrixForm[N[x]]];
```

$$T=\begin{pmatrix} \frac{300}{7} \\ \frac{3725}{112} \\ \frac{475}{14} \\ \frac{7075}{112} \\ \frac{225}{4} \\ \frac{5875}{112} \\ \frac{550}{7} \\ \frac{8525}{112} \\ \frac{975}{14} \end{pmatrix} \qquad T=\begin{pmatrix} 42.8571 \\ 33.2589 \\ 33.9286 \\ 63.1696 \\ 56.25 \\ 52.4554 \\ 78.5714 \\ 76.1161 \\ 69.6429 \end{pmatrix}$$

EK A TAYLOR SERİSİ

EK A.1 TAYLOR FORMÜLÜ

$f(x)$: Aradığımız fonksiyon

$P(x)$: Yaklaşık fonksiyon

$P(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+C_5x^5+\cdots+C_nx^n$

$x=0$ da bu iki fonksiyonun değerleri ve türevleri birbirine eşitlenerek $n+1$ koşul oluşturulur.

$P(0)=f(0)\ ,\ P'(0)=f'(0)\ ,\ P''(0)=f''(0),\ ...\ ,\ P^{(n)}(0)=f^{(n)}(0)$

oluşturulan bu koşullar yardımı ile C_i , $(i=0,\cdots,n)$ katsayıları bulunur.

$x=0$ da $P(0)=C_0 \rightarrow \boxed{C_0=f(0)}$

$P'(x)=C_1+2C_2x+3C_3x^2+4C_4x^3+5C_5x^4+\cdots+nC_nx^{n-1}$

$x=0$ da $P'(0)=C_1 \rightarrow \boxed{C_1=f'(0)}$

$P''(x)=2C_2+2*3C_3x+3*4C_4x^2+4*5C_5x^3+\cdots+(n-1)nC_nx^{n-2}$

$x=0$ da $P''(0)=2C_2 \rightarrow \boxed{C_2=\frac{1}{2}f''(0)}$

$P'''(x)=2*3C_3+2*3*4C_4x+3*4*5C_5x^2+\cdots+(n-2)(n-1)nC_nx^{n-3}$

$x=0$ da $P'''(0)=2*3C_3 \rightarrow \boxed{C_3=\frac{1}{2*3}f'''(0)}$

$P^{IV}(x)=2*3*4C_4+2*3*4*5C_5x+\cdots+(n-3)(n-2)(n-1)nC_nx^{n-4}$

$x=0$ da $P^{IV}(0)=2*3*4C_4 \rightarrow \boxed{C_4=\frac{1}{2*3*4}f^{IV}(0)}$

Bu işlemler devam edilirse $\boxed{C_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)}$ bulunur. Bu katsayılar $P(x)$ polinomunda yerine konursa $\boxed{P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}$ Taylor polinomu elde edilir.

Sıfırdan farklı noktalarda da benzer formüller bulunabilir.Bunun için için Polinomu $(x-x_0)$ ın kuvvetlerine göre yazılır.

$P(x)=C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+C_3(x-x_0)^3+C_4(x-x_0)^4+C_5(x-x_0)^5+\cdots+C_n(x-x_0)^n$

Bu polinomun x değişkenine göre türevleri alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki gibi bir $f(x)$ fonksiyonunun x_0 civarında Taylor polinomuna açılım formülü elde edilir.

$$\boxed{P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

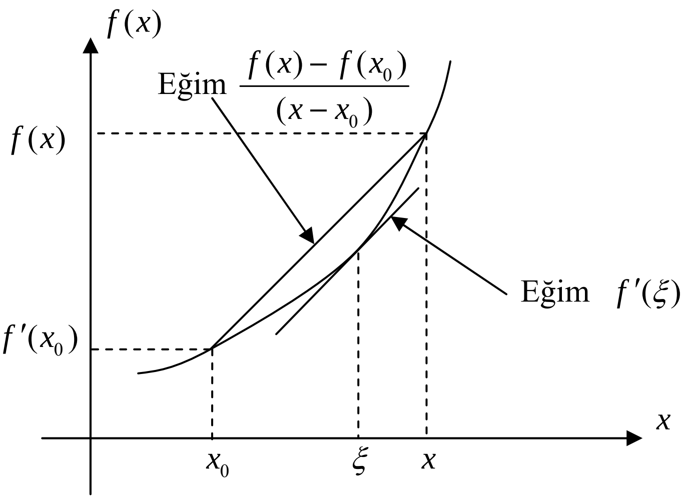
$f(x)$ fonksiyonu ile $P(x)$ fonksiyonu arasındaki farka n inci kalan denir.

$R_n(x)=f(x)-P(x) \rightarrow \quad f(x)=P(x)+R_n(x)$

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)}$$

Bu eşitliğe kalanlı Taylor formülü denir. Eğer $x_0=0$ ise çoğu kere bu formüle Maclaurin formülü denir.

Kalan formülünü yazmak için ortalama değer teoremi uygulanır.



$$\boxed{f'(\xi)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Lineer yaklaşım için $P_0(x)=f(x_0)$ ve fark $f(x)-P_0(x)=f(x)-f(x_0)$ olur.

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad\rightarrow\quad f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$$

Analizin temel teoreminden $f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x} f'(t)dt$ eşitliği yazılabilir.

$f(x)-P_0(x_0)=\int_{x_0}^{x} f'(t)dt$ bu eşitliğe entegral formundaki kalan denir.

Yukarıdaki integrale kısmi integrasyon işlemi uygulanırsa
$u=f'(t)$, $dv=dt$ burada $v=t-x$ olmalıdır.

$$f(x)-f(x_0)=f'(t)(t-x)\Big|_{x_0}^{x}-\int_{x_0}^{x} f''(t)(t-x)\,dt=-f'(x_0)(x_0-x)+\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt$$

$$f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x_0-x)]=\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt$$

Bu eşitliğin sol tarafı $f(x)-P_1(x)$ farkına eşittir.
Aynı şekilde kısmı integrasyon uygulanırsa

$u=f''(t)$, $dv=(x-t)dt$ burada $v=\frac{(t-x)^2}{2}$ olur.

$$f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x_0-x)]=-f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\Big|_{x_0}^{x}+\int_{x_0}^{x} f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt$$

$$f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x_0-x)+f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}]=\int_{x_0}^{x} f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt$$

aynı şekilde devam edilirse integral formundaki kala formülü elde edilir.

$$R_n(x)=\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

Entegral formundaki kalan, aşağıdaki gibi, Lagrange formunda yazılabilir.
$x>x_0$ kabul edilirse işlemler basitleşir.
$f^{(n+1)}(t)$ nin $x_0\le t\le x$ aralığında minimum değeri m , maksimum değeri M ile gösterilsin.

$$m\frac{(x-t)^n}{n!} \le f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} \le M\frac{(x-t)^n}{n!}$$

$$\int_{x_0}^{x} m\frac{(x-t)^n}{n!}dt \le \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \le \int_{x_0}^{x} M\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

sınır değerlere ait entegraller kolayca alınabilir.

$$m\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \le f(x)-P_n(x) \le M\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Bütün terimler $\dfrac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}$ ile çarpılırsa

$$m \le \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}[f(x)-P_n(x)] \le M$$

elde edilir. $f^{(n+1)}(t)$ m ile M arasında bir değer olduğuna göre, ξ de x_0 ile x arasında öyle bir değer olur ki $f^{(n+1)}(\xi) = \dfrac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}[f(x)-P_n(x)]$ yazılabilir.

Böylece Lagrange formundaki kalan elde edilir.

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Eğer fonksiyonun [a,b] aralığındaki $(n+1)$ inci türevi sınırlı ise yani $a \le t \le b$ nin her yerinde $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \le M$ ise

$$\left|R(x)\right| = \frac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}$$ elde edilir.

TAYLOR SERİSİNİ KULLANARAK ELDE EDİLEN ÖZEL AÇILIMLAR

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!} + R_n$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_n$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} + R_n$$

İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN TAYLOR SERİSİ

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\partial^{(k+l)} f(x_0,y_0)}{\partial x^k \partial y^l}\frac{1}{k!l!}(x-x_0)^k(y-y_0)^l$$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2!}[f(x_0,y_0)(x-x_0)^2 +$$
$$2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2] + \cdots$$